ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程

力　　学

(増訂第 3 版)

エリ・デ・ランダウ
イェ・エム・リフシッツ
広 重　　徹
水 戸　　巌 訳

東京図書株式会社

Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц

МЕХАНИКА

издание третье,
исправленное и дополненное

Издательство «Наука»

Москва 1973

初版まえがきから

われわれは本書をてはじめとして，“理論物理学教程”の全巻を逐次刊行してゆくつもりである．この教程の最終的な計画は，いまのところつぎのようになっている：

1. 力 学
2. 場の理論〔邦訳：広重徹・恒藤敏彦訳《場の古典論》，1964年，東京図書〕
3. 量子力学（非相対論的理論）〔邦訳：佐々木健・好村滋洋・井上健男訳《量子力学（全2巻)》，1967，70年，改訂新版1983年，東京図書〕
4. 相対論的量子論〔邦訳：井上健男訳《相対論的量子力学（全2巻)》，1969，72年，東京図書〕
5. 統計物理学〔邦訳：小林秋男・小川岩雄・富永五郎・浜田達二・横田伊佐秋訳《統計物理学（全2巻)》，1957，58年，岩波書店〕
6. 流体力学〔邦訳：竹内均訳《流体力学（全2巻)》，1970，71年，東京図書〕
7. 弾性理論〔邦訳：佐藤常三訳《弾性理論》，1972年，東京図書〕
8. 連続媒質の電気力学〔邦訳：井上健男・安河内昻・佐々木健訳《電磁気学（全2巻)》，1962，65年，東京図書〕
9. 物理的運動学〔邦訳：井上健男・石橋善弘・柳下崇訳《物理的運動学（全2巻)》，1982年，東京図書〕

本書の校正を援助されたイ・イェ・ジャロシンスキーとエリ・ペ・ピタエフスキーとに感謝する．

モスクワ，1957年7月

エリ・デ・ランダウ
イェ・エム・リフシッツ

第3版まえがき

本書の第2版は初版とほとんど変わりがなかった．新しい版を準備するにあたっても，実質的な改訂の必要は認められなかった．したがって，本書の大部分は（誤植をなおしただけで）もとの紙型によって印刷した．エリ・ペ・ピタエフスキーの協力を得ておこなった書きなおしと追加は，断熱不変量を扱った最後の数節だけに限られている．

1972年6月

イェ・エム・リフシッツ

目　次

第1章 運動方程式

§1. 一般座標

質点の概念は力学の基礎概念の1つである[1]. ある物体の運動を記述する場合, その大きさが無視できるようなとき, その物体を質点という言葉でよぶことにする. いうまでもなく, このような無視が可能かどうかは, それぞれの問題における具体的な条件によって変わってくる. たとえば惑星は太陽のまわりの公転を考えるときは質点と考えてよいが, その自転を問題にするときは, もちろんそのようなことはできない.

空間における質点の位置を位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表わす. 位置ベクトルとは, その成分が質点の位置のデカルト座標 x, y, z に一致するベクトルである. $\boldsymbol{r}$ の t についての導関数

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

を速度, 2階導関数 $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ を加速度という. 以下, 時間についての微分を文字の上につけたドットで表わすことにしよう. たとえば $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$. N個の質点の位置をきめるには, N個の位置ベクトル, したがって $3N$ 個の成分を必要とする. 一般に, ある系の位置を一意的に決定するのに必要な, 独立な量の個数をその**系の自由度**という. いまの場合, それは $3N$ である. この量は, かならずしも質点のデカルト座標である必要はなく, 問題の条件によって, もっとつごうのよい他の座標をつかうことができる. 系の位置をきめるのに十分な, 任意の s 個の量 $q_1, q_2, \cdots, q_s$ をその系の**一般座標**といい, その導関数 $\dot{q}_i$ を**一般速度**という.

一般座標の値をすべて与えても, しかし, その時刻での《力学的状態》はきまらない. ある時刻以後の系の位置をも予言することができるというのが, 力学的状態がきまったということの意味である. 系の座標の値を与えただけでは, 系は勝手な速度をもつことができ, その値に応じてそれ以後の時刻の（すなわち無限

1) 《質点》の代わりにしばしば《粒子》とよぶことがある.

小の時間 dt ののちの）系の位置はさまざまになる．

経験が示すように，座標と速度のすべてを同時に与えるならば，系の状態は完全に決定され，系のそれ以後の運動は原理的には予言できる．数学的には，このことはつぎのことを意味する：ある時刻にすべての座標 q と速度 $\dot{q}$ を与えると，その時刻における加速度 $\ddot{q}$ の値もまた一通りにきまる[1]．

加速度を座標および速度と結びつける関係を**運動方程式**という．関数 $q(t)$ についていえば，これは2階微分方程式であり，それを積分することによって，原理的にその関数，すなわち力学系の運動の軌跡を決定することができる．

§ 2. 最小作用の原理

力学系の運動法則のもっとも一般的な定式化は，**最小作用の原理**（または**ハミルトンの原理**）で与えられる．この原理にしたがえば，おのおのの力学系は一定の関数

$$L(q_1, q_2, \cdots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s, t)$$

（または簡単に $L(q, \dot{q}, t)$）によって特徴づけられ，その際，系の運動は，つぎのような条件をみたす．

時刻 $t = t_1$ および $t = t_2$ に，系が，2組の座標値 $q^{(1)}, q^{(2)}$ で示される位置にいたとしよう．そのとき，これらの位置のあいだでは，系は積分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt \qquad (2.1)$$

が可能な最小の値をとるように運動する[2]．関数 L を，与えられた系の**ラグランジアン**といい，積分 (2.1) を**作用**という．

ラグランジアンが q と $\dot{q}$ とだけの関数であって，もっと高階の導関数 $\ddot{q}, \dddot{q}, \cdots$ によらないということは，力学系は座標と速度を与えるだけで決定されるという，先に述べた事実を表わしている．

積分 (2.1) の極小値をきめるための微分方程式を導こう．簡単のため，まず系

1) 簡単のために q でもって座標の1組 $q_1, q_2, \cdots, q_s$ を表わすことにする（同様に $\dot{q}$ でもって $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s$ を表わす）．

2) しかし，最小作用の原理のこのような定式化は運動の軌跡全体に対しては，実は正しいとはかぎらず，十分に小さい一部分に対してだけなりたつのである．軌跡全体に対しては，積分 (2.1) は極値をもつだけで，それはかならずしも最小値をもつとはかぎらない．しかし，この事情は，運動方程式を導くのにはまったく本質的でない，運動方程式を導くのには極値の条件のみをつかうのであるから．

の自由度が1であるとして式を書こう．したがって求めているのは，1つの関数 $q(t)$ である．

$q=q(t)$ がちょうど S を最小にするような関数であったとしよう．これは，$q(t)$ の代わりにある任意の関数

$$q(t)+\delta q(t) \tag{2.2}$$

をもってくると S が増加するということを意味する．ここで $\delta q(t)$ は t_1 から t_2 までの時間全体にわたって小さな関数（関数 $q(t)$ の**変分**という）である．$t=t_1$ と $t=t_2$ では，比較されている関数（2.2）は $q^{(1)}$ および $q^{(2)}$ と同一の値をとらなければならないから

$$\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0. \tag{2.3}$$

q を $q+\delta q$ に変えると S の変化は

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q,\, \dot{q}+\delta\dot{q},\, t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q,\, \dot{q},\, t)dt.$$

この差の，δq および $\delta\dot{q}$ のベキによる（被積分関数の）展開は，1次の項から始まる．S が極小となる[1] ための必要条件は，この項（積分の第1変分，あるいは単に変分といわれる）がゼロになることである．

こうして，最小作用の原理は，つぎの形に書ける．

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\, \dot{q},\, t)dt=0, \tag{2.4}$$

あるいは変分を実行して

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right)dt=0.$$

$\delta\dot{q}=\dfrac{d}{dt}\delta q$ をもちい，第2項を部分積分すると，

$$\delta S=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\bigg|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\, dt=0 \tag{2.5}$$

を得る．条件（2.3）によって第1項は消える．残った積分は，任意にえらばれた δq に対してゼロにならなければならない．このことは被積分関数がつねにゼロであるときだけ可能である．このようにして

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

を得る．

1）　一般には，極値．

自由度が1以上のときには，最小作用の原理において，s 個の関数 $q_i(t)$ を独立に変えなければならない．このとき s 個の方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,s) \tag{2.6}$$

を得ることは明らかである．これが求める微分方程式であって**ラグランジュ方程式**といわれる[1]．与えられた力学系のラグランジアンがわかっているならば，方程式 (2.6) は，加速度と，速度および座標のあいだの関係をうちたてる．すなわち系の運動方程式そのものである．

数学的に見ると，(2.6) は，s 個の独立な関数 $q_i(t)$ に対する s 個の2階微分方程式である．このような組の一般解は $2s$ 個の任意定数を含む．その決定，したがってまた力学系の運動の完全な決定のためには，初期条件の値が必要である．初期条件とは，ある与えられた時刻における系の状態を特徴づける条件，たとえば最初の時刻でのすべての座標と速度の値である．

力学系が2つの部分 A と B とからなりたっていて，そのおのおのの部分が孤立していた場合には，ラグランジアンとしてそれぞれ L_A，L_B をもっていたとしよう．別々の部分が，そのあいだの相互作用が無視できるほど遠く離れているという極限では，全体系のラグランジアンは

$$\lim L=L_A+L_B \tag{2.7}$$

となる．このラグランジアンの加法性は，互いに相互作用していない各部分の運動方程式が相手の部分の量を含むことはないという事実を表現している．

力学系のラグランジアンに任意の定数をかけても，そのことは運動方程式の上に何の影響をも与えないことは明らかである．したがって，ラグランジアンが一意的にはきまらない，つまり，個々のラグランジアンに別々の任意定数をかけてもよいといったことが結論されるように思われる．加法性はこのような不定性を除いてくれる．加法性によると，すべての個々のラグランジアンに，同時に同一の定数をかけることだけが許される．これはこの物理量の測定の単位をどうえらぶかという当然の任意性からでてくるものである．この問題については §4 でふたたびふれる．

つぎのような，一般的な注意をしておかなければならない．2つのラグラ

---

1) (2.1) のような積分の極値をきめるという公式的な問題を扱う変分計算では，オイラーの方程式とよばれる．

ンジアン $L'(q, \dot{q}, t)$ と $L(q, \dot{q}, t)$ とがあって，そのちがいが，座標と時間の任意の関数 $f(q, t)$ の時間についての完全導関数に等しいものとする：

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t). \tag{2.8}$$

この2つの関数に対応する積分(2.1)は，つぎの関係で結ばれる．

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt$$
$$= S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1).$$

すなわち，S' と S の差は，作用の変分の際には消えてしまう項だけであり，したがって，条件 $\delta S' = 0$ は条件 $\delta S = 0$ と一致し，運動方程式の形はまったく変化しない．

このように，ラグランジアンの決定には，座標と時間の任意関数の時間についての完全導関数を付け加えてもよいという任意性が残されている．

§3.　ガリレイの相対性原理

力学系の現象を研究するためには，特定の**基準系**をえらぶ必要がある．一般的にいえばちがった基準系では運動法則はちがった形をとる．もし任意の基準系をとるならば，もっとも簡単な現象の法則でさえ，きわめて複雑な形をとるであろう．したがって，力学現象の法則がもっとも簡単な形をとるような基準系を見いだすことが問題となる．

勝手にえらばれた基準系に関しては，空間は一様でなくまた等方でもない．このことは，ある物体がほかのどの物体とも相互作用していないのに，空間内のその物体のさまざまな位置およびさまざまな方向が力学的に見て同等でないということを意味する．時間に関して一般の場合——すなわち一様でない時間の場合にも同様である．すなわち，さまざまな時刻は互いに同等でない．このような空間，時間の性質が力学系の記述を複雑にすることは明らかである．たとえば，自由な（つまり外的な作用をうけていない）物体も静止することができない：たとえある瞬間にその速さがゼロであっても，つぎの瞬間には物体はある方向に動き始めてしまうということになるのだから．

しかしながら，その系に関しては空間が一様かつ等方的であり，時間も一様であるというような基準系をつねに見いだすことができるということがわかる．こ

のような系を**慣性系**という．その特別な場合として，この系では，ある時刻に静止していた自由な物体は，いつまでも静止しつづける．

ここで，自由に運動している質点の慣性基準系においてラグランジアンから二，三の結論を出すことができる．空間と時間の一様性は，この関数が質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$，時間 t をあらわには含まないということを意味する．すなわち L はただ $\boldsymbol{v}$ だけの関数である．空間の等方性のためにラグランジアンはベクトル $\boldsymbol{v}$ の方向に依存してはならない．したがって，ラグランジアンは $\boldsymbol{v}$ の絶対値，すなわちその2乗 $\boldsymbol{v}^2 = v^2$ だけの関数となる：

$$L = L(v^2). \tag{3.1}$$

ラグランジアンが $\boldsymbol{r}$ によらないことから $\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = 0$[1]．したがってラグランジュ方程式によって

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = 0,$$

すなわち $\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \text{const.}$ 一方 $\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}$ は速度だけの関数であることから，また

$$\boldsymbol{v} = \text{const} \tag{3.2}$$

でなければならない．

こうしてわれわれは，つぎのことを導くことができた．慣性基準系においては，すべての自由な運動は大きさも方向も一定の速度をもつ．これがいわゆる**慣性の法則**の内容である．

もしわれわれの慣性基準系とならんで，これに対して直線的にかつ等速度で運動しているもう1つの基準系を考えると，この新しい基準系に対する自由運動の法則は，もとの慣性基準系に対するものと同じものになる：すなわち自由な運動は，ここでも等速度運動となる．

ところで，経験が示すように，これらの基準系は，その上で自由運動の法則が同一であるだけでなく，そのほかのすべての力学的関係についてもまったく同等なのである．このように慣性基準系は1つではなく，互いに等速直線運動をする無限に多くの慣性基準系が存在する．これらすべての基準系のなかで空間と時間の性質は同一であり，すべての力学的法則は同一である．これが力学のもっとも

1) ベクトルによるスカラーの導関数という形式は，このスカラーをそのベクトルのそれぞれの成分で微分したものを成分とするベクトルを表わす．

重要な原理，**ガリレイの相対性原理**である．

上述のすべてのことが，慣性系の性質が特別のものであることを示している．この特別な性質のために力学的現象の記述はふつう慣性基準系の上でおこなわれる．以後とくにことわらないかぎり，慣性基準系のみを扱うことにする．

無限に多くの慣性系がすべて力学的に完全に等価だということは，同時に，他の慣性系に対して特別な意味をもつような《絶対》基準系が存在しないということを意味する．

2つの基準系KとK'があって，K'はKに対して速度$\boldsymbol{V}$で運動している．このときKおよびK'での同一の質点の座標$\boldsymbol{r}$と$\boldsymbol{r}'$とは

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V}t \tag{3.3}$$

という関係で結ばれる．この場合，時間の進み方は両方の基準系で同一だということが暗に仮定されている：

$$t = t'. \tag{3.4}$$

絶対時間の仮定は古典力学の思想の基礎そのものに横たわっている[1]．

公式 (3.3), (3.4) を**ガリレイ変換**という．ガリレイの相対性原理は，この変換に対して運動方程式が不変であることの要求として定式化することができる．

§4. 自由な質点のラグランジアン

ラグランジアンをきめることに移ろう．最初にもっとも簡単な場合――慣性基準系における，自由な質点の運動を取り扱おう．すでに見たように，この場合のラグランジアンは速度の2乗だけの関数である．その依存のしかたを知るために，ガリレイの相対性原理をもちいよう．慣性基準系Kが慣性基準系K'に対して無限に小さな速度$\boldsymbol{\varepsilon}$で運動しているとすると$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\varepsilon}$．すべての慣性系で運動方程式は同一の形をとらなければならない．したがってラグランジアン$L(v^2)$がこの変換に際してL'になったとすると，L'は$L(v^2)$とちがったとしてもその差は座標と時間の関数の完全導関数だけであろう（§2のおわりを見よ）．

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2\boldsymbol{v\varepsilon} + \varepsilon^2).$$

この表現を$\boldsymbol{\varepsilon}$のベキで展開して高次の微小量を省略すると，

$$L(v'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\boldsymbol{v\varepsilon}.$$

---

1) これは相対性理論の力学においては正しくない．

この等式の右辺の第2項が時間についての完全導関数になるためには，それは速度 $\boldsymbol{v}$ の1次の関数でなければならない．したがって $\dfrac{\partial L}{\partial v^2}$ は速さによらない．すなわちラグランジアンはいまの場合 v^2 に直接比例する：

$$L = av^2.$$

このような形のラグランジアンが無限に小さな速さの変換の際にガリレイの相対性原理を満足するということから，ただちに，系 K' に対する K の速度 $\boldsymbol{V}$ が有限の場合にもラグランジアンが不変であるということがでてくる．実際，

$$L' = av'^2 = a(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{V})^2 = av^2 + 2a\boldsymbol{v}\boldsymbol{V} + aV^2,$$

あるいは

$$L' = L + \frac{d}{dt}(2a\boldsymbol{r}\boldsymbol{V} + aV^2t).$$

第2項は完全導関数であり，おとすことができる．

定数 a は $m/2$ と書くのが普通である．自由な質点のラグランジアンは，結局

$$L = \frac{mv^2}{2} \tag{4.1}$$

となる．mを質点の**質量**という．ラグランジアンの加法性によって，相互作用していない質点系については

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} \tag{4.2}$$

である[1]．

上のような質量の定義は，加法の性質を考えに入れたときだけ真の意味をもつものだということを強調しておかねばならない．すでに §2 で注意したように，ラグランジアンに任意の定数をかけても，運動方程式はなんの影響もうけない．関数 (4.2) に対しては，任意の定数をかけることは，質量をはかる単位を変更することに帰着する．別々の粒子の質量の比——それだけが真に物理的な意味をもつのであるが——はこの単位の変更によって変化しない．

質量がマイナスの値をとりえないことは容易に導ける．実際，最小作用の原理によると，空間内の点1から点2への運動に対して，積分

$$S = \int_1^2 \frac{mv^2}{2} dt$$

1）粒子の番号を示す添字には $a, b, c, \cdots$ をもちい，座標番号を示す添字には，$i, k, l,$ $\cdots$をもちいる．

は極小値をもつ．もしも質量がマイナスだったとすると，1から急激に遠ざかり，2に急激に近づく道筋をとれば，作用積分は絶対値のいくらでも大きな負の値をとり，極小値をもつことができない[1]．

つぎのことに注目すると便利である：

$$v^2 = \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{dl^2}{dt^2}. \tag{4.3}$$

これによれば，ラグランジアンをつくるには，対応する座標をもちいて表わされた線素 dl の長さの2乗を求めればよい．

たとえば，デカルト座標では $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ であり，したがって

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \tag{4.4}$$

円筒座標では $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$．したがって

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2). \tag{4.5}$$

球座標では $dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$．したがって

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2). \tag{4.6}$$

§5. 質点系のラグランジアン

こんどは，質点相互間には作用があるが，他の物体とは相互作用をしていない質点系をしらべよう．このような系を**孤立している**という．質点間の相互作用は，相互作用のない場合のラグランジアン(4.2)に座標の一定の関数を加えることによって表現される[2]．この関数を U と書く：

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots) \tag{5.1}$$

($\boldsymbol{r}_a$ は a 番目の位置ベクトル)．これが孤立系のラグランジアンのもっとも一般的な形である．

和

$$T = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}$$

---

1) 2ページの注でおこなった留保はこの証明をさまたげない．なぜなら，$m<0$ に対しては軌跡全体のどのような小さな一部分をとってみても積分は極小値をもつことができないのだから．

2) これは，本書で述べている古典的な――相対論的でない――力学に関して確言できることである．

を**運動エネルギー**といい，Uを**ポテンシャル・エネルギー**という．これらの名称の意味は §6 で述べる．

ポテンシャル・エネルギーが，すべての質点の同一時刻における位置だけの関数であるということは，質点のうちの1つの変位がただちに他のすべての質点に影響するということ，すなわち作用が一瞬に《伝わる》ことを意味している．古典力学における相互作用のこのような特徴は，古典力学の基本的前提——絶対時間とガリレイの相対性原理とに密接に結びついている．もし作用が一瞬に伝わらない，すなわち有限の速さで伝わるのであれば，この速さはちがう基準系（互いに運動している基準系）ではことなってくる．なぜなら，時間の絶対性は自動的に，あらゆる現象に速度の合成則が適用できることを意味しているから．ところが，そうすると，相互作用している物体の運動法則はちがった（慣性）系ではちがった形をとるということになるが，これは相対性原理に反する．

§3 では時間の一様性についてだけ論じた．ラグランジアン (5.1) の形は，時間が一様であるだけでなく等方であること，すなわち時間の両方向についての性質が同一であることを示している．

事実，t を $-t$ に変えてもラグランジアンは不変であり，したがって運動方程式は不変である．いいかえると，ある系において1つの運動が可能であれば，その逆の運動，つまり（前の運動で）系が経過したのと同じ状態が逆の順序で経過することが可能である．この意味で，古典力学の法則にしたがっておこるすべての運動は可逆的である．

ラグランジアンを知れば，運動方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a}=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} \tag{5.2}$$

を立てることができる．

(5.1) を代入すれば，つぎの式を得る：

$$m_a\frac{d\boldsymbol{v}_a}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}. \tag{5.3}$$

この形式での運動方程式は**ニュートンの方程式**とよばれ，相互作用している質点系の力学の基礎をなしている．方程式 (5.3) の右辺を構成しているベクトル

$$\boldsymbol{F}_a=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a} \tag{5.4}$$

は a 番目の質点に作用する**力**とよばれる．Uと同様に，力はすべての質点の座標

だけに依存し，その速度にはよらない．したがって，方程式(5.3)は加速度のベクトルが座標だけの関数であることを表わしている．

ポテンシャル・エネルギーは任意定数の不定さを残している．この定数を付け加えることは運動方程式を変えない（§2の終わりで示したラグランジアンの不定性の一部分）．この定数のえらび方のうちでもっとも自然で普通にもちいられている方法は，粒子間の距離を無限に大きくしたときにポテンシャル・エネルギーがゼロになるようにえらぶことである．

運動を記述するのに，デカルト座標がもちいられていないで，任意の一般座標 q_i がもちいられている場合には，ラグランジアンはそれに応じた変形

$$x_a = f_a(q_1, q_2, \cdots, q_s), \quad \dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k}\dot{q}_k \quad \text{など}$$

をうける．この表現を関数

$$L = \frac{1}{2}\sum_a m_a(\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U$$

に代入して必要なラグランジアンが得られる．それは，つぎのような形をしているであろう：

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k - U(q). \tag{5.5}$$

ここで a_{ik} は座標だけの関数である．一般座標で書いた運動エネルギーは，従来どおり速さの2次形式になっているが，この場合には，さらに，座標にも依存することがある．

これまでは，孤立した系についてだけ考えてきた．今度は孤立していない系 A を考えることにする．この系 A は，与えられた運動をしている他の系 B と相互作用しているとしよう．この場合，系 A は与えられた外部の場（系 B によってつくられた）のなかで運動する，という．運動方程式は座標のおのおのの独立な（すなわち残りの変数は既知のものとしての）変分によって最小作用の原理から導かれるのであるから，われわれは，系 A のラグランジアン L_A を求めるために，全系 $A+B$ のラグランジアン L をもちいることができる．L のなかの座標 q_B には与えられた時間の関数を代入すればよい．

系 $A+B$ が孤立系であると仮定すれば，

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B).$$

ここではじめの2項は系 A および B の運動エネルギーを表わし，第3項は両系の

共通のポテンシャル・エネルギーを表わしている． q_B の代わりに与えられた時間の関数をおきかえると， 第2項は時間だけの関数 $T(q_B(t), \dot{q}_B(t))$ となり，したがってまた，ある他の時間の関数の完全導関数となり，省略できる：

$$L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t)).$$

このようにして，外部の場のなかにおける系の運動は普通のラグランジアンで書ける．ただしこの場合には，ポテンシャル・エネルギーは時間変数を陽に含んでいる．

たとえば,外部の場のなかにおける1質点の運動に対するラグランジアンのもっとも一般な形は

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(\boldsymbol{r}, t) \tag{5.6}$$

であり，運動方程式は

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} \tag{5.7}$$

である．

すべての質点に同一の力 $\boldsymbol{F}$ をおよぼすような場を**一様である**という． このような場のポテンシャル・エネルギーは明らかに

$$U = -\boldsymbol{Fr} \tag{5.8}$$

である．

この章を終える前に，いろいろの具体的な問題にラグランジュ方程式をもちいるときの注意を述べておこう．

物体（質点）のあいだの相互作用が《**拘束**》とよばれる性質をもっている場合，すなわち，物体間の配列に制限がもうけられているような場合がしばしばおこる．実際に，このような拘束は，物体を細い棒，糸，ちょうつがいなどで固定した場合に実現される．このような場合には，運動にとって新しい事実が生じる．物体の運動は接触箇所に摩擦をともない，その結果，一般的にいって純粋な力学の適用限界という問題が現われる（§25を見よ）．しかし多くの場合， 系内の摩擦は，その影響をまったく無視してよいくらい小さい．《固定要素》の質量を無視してよい場合には，固定要素の役割は単に系の自由度をへらす（$3N$にくらべて）ことになる．この場合は，実際上の自由度の数と同じだけの独立な一般座標をもった(5.5)の形のラグランジアンが，運動をきめるために利用される．

問　題

一様な重力場（重力加速度 g）のなかにある，つぎのような系のラグランジアンを求めよ．

1.　2重平面振子（図1）．

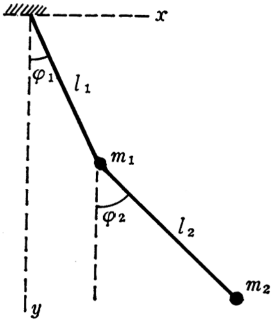


図　1

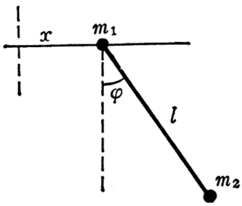


図　2

解　座標として糸 l_1 および l_2 が鉛直線となす角度 φ_1, φ_2 をとる．質点 m_1 に対して

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2, \qquad U = -m_1 g l_1 \cos\varphi_1.$$

第2の質点の運動エネルギーを求めるために，そのデカルト座標 x_2, y_2（支点を座標原点とし，下向き鉛直線を y 軸とする）を角度 φ_1, φ_2 で表わす：

$$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2, \qquad y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2.$$

したがって

$$T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2}[l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2].$$

結局

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2.$$

2.　質量 m_2 の単振子，その支点となっている質点（質量 m_1）が水平方向に運動できるようになっている（図2）．

解　質点 m_1 の座標を x，単振子の糸と鉛直線のあいだの角度を φ として

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x} \dot{\varphi} \cos\varphi) + m_2 g l \cos\varphi.$$

3.　つぎのような支点をもつ単振子：

a）　支点が鉛直平面内の円周上を一定の角速度 γ で一様に動いている場合（図3）．

b）　水平方向に $a\cos\gamma t$ にしたがって振動している場合．

c） 鉛直方向に $a\cos\gamma t$ にしたがって振動している場合.

解 a） 質点 m の座標は,

$$x = a\cos\gamma t + l\sin\varphi, \qquad y = -a\sin\gamma t + l\cos\varphi.$$

ラグランジアンは

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2\sin(\varphi - \gamma t) + mgl\cos\varphi;$$

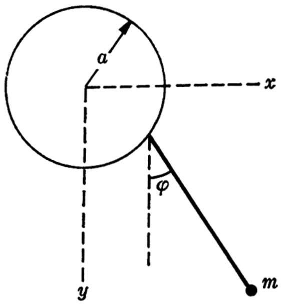


図 3

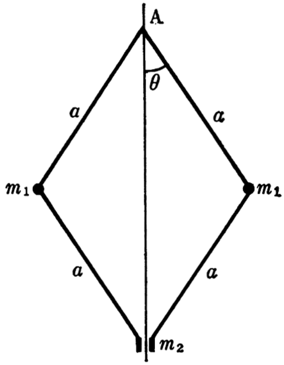


図 4

ここで時間だけに依存する項をおとし, $mal\gamma\cos(\varphi - \gamma t)$ の時間についての完全導関数を除いた.

b） 質点 m の座標は,

$$x = a\cos\gamma t + l\sin\varphi, \qquad y = l\cos\varphi.$$

ラグランジアンは（完全導関数を除いて）

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2\cos\gamma t\sin\varphi + mgl\cos\varphi.$$

c） おなじようにして

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2\cos\gamma t\cos\varphi + mgl\cos\varphi.$$

4. 図4に示したような系. m_2 は鉛直軸にそって動き, 系全体はこの軸のまわりを一定の角速度 Ω でまわっている.

解 糸 a と鉛直線とのあいだの角度を θ とし, 系全体の回転軸のまわりの回転角を φ とする；$\dot{\varphi} = \Omega$. 質点 m_1 に対して変位要素は $dl_1^2 = a^2d\theta^2 + a^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$, 質点 m_2 に対しては, 固定点 A からの距離が $2a\cos\theta$, したがって $dl_2 = -2a\sin\theta\, d\theta$. ラグランジアンは

$$L = m_1a^2(\dot{\theta}^2 + \Omega^2\sin^2\theta) + 2m_2a^2\sin^2\theta\cdot\dot{\theta}^2 + 2ga(m_1 + m_2)\cos\theta$$

となる.

第2章 保存法則

§6. エネルギー

力学系の運動に際して状態をきめる $2s$ 個の量 q_i および $\dot{q}_i$ ($i=1,2,\cdots,s$) は時間とともに変わってゆく．ところが，これらの量の関数で，しかも運動のあいだ一定の値を保つ量が存在する．この値は運動のはじめの条件だけできまる．このような関数を**運動の積分**という．

自由度 s の孤立系の場合には，独立な運動の積分の数は $2s-1$ 個である． これは，つぎのように証明される．運動方程式の一般解は $2s$ 個の任意定数を含む（4ページを見よ)．孤立系の運動方程式は時間を陽には含んでいないから，時間の原点をどこにとるかはまったく任意であり，一般解の任意定数のうちの1つを時間の付加定数 t_0 にえらぶことはいつでも可能である．$2s$ 個の関数

$$q_i = q_i(t+t_0, C_1, C_2, \cdots, C_{2s-1}),$$
$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t+t_0, C_1, C_2, \cdots, C_{2s-1})$$

から $t+t_0$ を消去して $2s-1$ 個の任意定数 $C_1, C_2, \cdots C_{2s-1}$ を q および $\dot{q}$ の関数の形に書きなおすことができよう．これらは運動の積分にほかならない．

しかし，すべての運動の積分が力学において同様に重要な働きをするわけではない．いくつかのものは，その一定であることの根拠が空間と時間の基本的な性質――その一様性と等方性とに深く結びついている．これらのいわゆる保存量はすべて加法性という重要な共通の性質をもっている．すなわち，いくつかの部分からなり，その相互作用が無視できるような系についての，それらの保存量の値は，その各部分についての値の総和になっている．

この加法性は，それをもつ物理量に，とくに重要な力学的役割を与える．たとえば2つの物体がある時間のあいだ相互作用していたとしよう．相互作用の前および後では，系全体の加法的な積分のおのおのは，別々の状態にあったときの2つの物体のそれぞれの値の和に等しいのであるから，もし相互作用より前の状態が知られているならば，相互作用より後の物体についての多くの結論が，これら

の値の保存法則からただちにひき出せることになる．

まず最初に，**時間の一様性**から導き出される保存法則から始める．

時間の一様性のために，孤立系のラグランジアンは時間に陽に依存することはない．したがって，ラグランジアンの時間に関する完全導関数はつぎの形に書ける：

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

（もしLが時間にあらわに依存するのであれば，右辺には $\frac{\partial L}{\partial t}$ という項が付け加わる）．導関数 $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ をラグランジュ方程式にしたがって $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ と書きなおせば，

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i \dot{q}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}+\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i=\sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right),$$

あるいは

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L\right)=0.$$

したがって，つぎの量

$$E=\sum_i \dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L \tag{6.1}$$

は孤立系の運動に際して不変であり，したがって系の運動の積分である．この量を系の**エネルギー**とよぶ．エネルギーの加法性はラグランジアンの加法性からただちに導かれる．というのは，エネルギーは，(6.1) のようにラグランジアンによって線形に表わされるからである．

エネルギーの保存法則は孤立系だけでなりたつのではなく，外部の場が一定の（すなわち時間によらない）場合にも正しい．保存法則を導くのにもちいられたラグランジアンの性質——時間に陽にはよらないこと——はこの場合にもまったく同様にもちいられる．エネルギーが保存される力学系は**保存系**とよばれる．

§5で見たように，孤立系の（あるいは一定の外場のなかにある）ラグランジアンは

$$L=T(q,\dot{q})-U(q)$$

の形をしており，ここでTは速度の2次関数である．ここで同次関数についてのオイラーの定理をもちいると

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T.$$

この値を (6.1) に入れて

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q)\ ; \tag{6.2}$$

デカルト座標では

$$E = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots). \tag{6.3}$$

このように，系のエネルギーは2つの本質的にちがった項，速さの関数である運動エネルギーと座標だけに依存するポテンシャル・エネルギーとの和になっている．

§7. 運　動　量

もう1つの保存法則は**空間の一様性**と結びついている．

この一様性のおかげで，孤立系の力学的性質は系全体としての空間内の任意の平行移動に対して不変である．これに対応して無限に小さな変位 $\boldsymbol{\varepsilon}$ を考え，ラグランジアンが不変にとどまることを要求しよう．

平行移動というのは，系のすべての点が同一方向に同じ大きさだけ変位すること，つまり $\boldsymbol{r}_a \to \boldsymbol{r}_a + \boldsymbol{\varepsilon}$ のことである．速度を変えず，座標を無限小だけ変えたときの関数 L の変化は

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} \delta \boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{\varepsilon} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}$$

である．ここで和は系のすべての質点にわたってとる．任意の $\boldsymbol{\varepsilon}$ に対して $\delta L = 0$ でなければならないから

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} = 0. \tag{7.1}$$

したがって，ラグランジュ方程式 (5.2) によって

$$\sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = 0.$$

このようにして，孤立系においては，ベクトル量

$$\boldsymbol{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} \tag{7.2}$$

が運動の際，不変にとどまることが導かれる．ベクトル $\boldsymbol{P}$ を**運動量**とよぶ．ラグランジアン (5.1) を微分すれば，質点の速度をつかって，運動量はつぎの形に表

わされることがわかる：

$$\boldsymbol{P}=\sum_a m_a\boldsymbol{v}_a. \tag{7.3}$$

運動量の加法性は明らかである．さらに，エネルギーとはちがい，粒子間の相互作用が存在しているかいないかには無関係に，系全体の運動量は各粒子の運動量

$$\boldsymbol{p}_a=m_a\boldsymbol{v}_a$$

の和である．

運動量ベクトルの3つの成分すべての保存法則は，外場がないときにだけなりたつ．しかし，外場があるときにも，もしそのポテンシャル・エネルギーが，デカルト座標のうちのあるものに依存していないならば，運動量のその成分は保存しうる．ポテンシャルに含まれていない座標軸にそった平行移動に対して力学系の性質は明らかに不変であり，前にやったのと同じようにして，運動量のこの軸への射影が保存することを見いだすことができる．たとえば z 軸の方向にむいた一様な場では，運動量の x, y 成分が保存する．

出発点となった等式 (7.1) それ自身も，はっきりした物理的意味をもっている．導関数 $\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}=-\dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}$ は a 番目の粒子に作用する力 $\boldsymbol{F}_a$ を表わしている．だから，等式 (7.1) は孤立系のすべての粒子に作用する力の総和がゼロであることを示している：

$$\sum_a \boldsymbol{F}_a=0. \tag{7.4}$$

とくに，2個の質点からなりたっている系では $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=0$，すなわち，第2の粒子の側から第1の粒子へ作用する力と，第1の粒子の側から第2の粒子に作用する力とは，大きさが等しく，かつ平行で逆向きである．この定理は作用・反作用の法則として知られている．

運動が一般座標 q_i で記述されているときには，ラグランジアンの一般速度についての導関数

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{7.5}$$

を**一般運動量**といい，一般座標についての導関数

$$F_i=\frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{7.6}$$

を**一般力**という．このいい方をつかえば，ラグランジュ方程式はつぎのようになる：

$$\dot{p}_i = F_i. \tag{7.7}$$

デカルト座標では一般運動量はベクトル $\boldsymbol{p}_a$ の成分に一致する．一般の場合には，量 p_i は一般速度 $\dot{q}_i$ の線形の同次関数ではあるが，しかし速さと質量との積ではない．

問　題

速度 $\boldsymbol{v}_1$ で運動している質量 m の粒子がポテンシャル・エネルギー一定（U_1）の半空間から，同じくポテンシャル・エネルギー一定（U_2）の半空間へ移行する．粒子の運動方向の変化をきめよ．

解　ポテンシャル・エネルギーは半空間のあいだの境界平面に平行な軸にそった座標にはよらない．したがって運動量のこの平面上への射影は保存する．境界面を通過する前後の速度 $\boldsymbol{v}_1$ および $\boldsymbol{v}_2$ と境界面の法線とのあいだの角度を θ_1 および θ_2 と書けば，$v_1 \sin\theta_1 = v_2 \sin\theta_2$. v_1 と v_2 とのあいだの関係はエネルギー保存則で与えられる．結局

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \sqrt{1 + \frac{2}{mv_1^2}(U_1 - U_2)}.$$

§ 8. 慣 性 中 心

孤立した力学系の運動量は，ちがった（慣性）基準系に関しては，ちがった値をとる．基準系 K' が基準系 K に対して速度 $\boldsymbol{V}$ で動いているとすると，基準系 K, K' に関する速度 $\boldsymbol{v}_a, \boldsymbol{v}'_a$ のあいだには $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}'_a + \boldsymbol{V}$ の関係がある．したがって，これらの基準系に関する運動量 $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{P}'$ のあいだの関係は

$$\boldsymbol{P} = \sum_a m_a \boldsymbol{v}_a = \sum_a m_a \boldsymbol{v}'_a + \boldsymbol{V} \sum_a m_a,$$

すなわち

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}' + \boldsymbol{V} \sum_a m_a \tag{8.1}$$

である．

とくに，全運動量がゼロであるような基準系 K' がかならず存在する．(8.1) で $\boldsymbol{P}' = 0$ とおくと，そのような基準系の速度は

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{P}}{\sum m_a} = \frac{\sum m_a \boldsymbol{v}_a}{\sum m_a} \tag{8.2}$$

に等しいことがわかる.

もし力学系の全運動量がゼロであれば，力学系は基準系に関していわば静止している．これは静止している質点という概念の十分自然な一般化になっている．これに対して式(8.2)で与えられた速度 $\boldsymbol{V}$ は，ゼロとことなる運動量をもつ力学系の《全体としての運動》の速度という意味をもつ．このように，運動量の保存法則は，力学系全体としての静止および速度という概念の，自然な形での定式化を可能にする.

公式(8.2)は，力学系全体としての運動量 $\boldsymbol{P}$ と速度 $\boldsymbol{V}$ とのあいだの関係が，ちょうど，系全体の質量の和に等しい質量 $\mu=\sum_a m_a$ をもった単一の質点の運動量と速度とのあいだの関係と同じであることを示している．この事情を**質量の加法性**の定理と称することができよう.

公式(8.2)の右辺は，量

$$\boldsymbol{R}=\frac{\sum m_a \boldsymbol{r}_a}{\sum m_a} \tag{8.3}$$

の時間についての完全導関数である．系全体としての速度は，位置ベクトルが(8.3)で与えられている点の移動の速度であるということができる．このような点を系の**慣性中心**という.

孤立系の運動量の保存法則は，系の慣性中心は一様な直線運動をするという定理として定式化できる．ただちにわかるように，これは§3で自由度1の質点について導いた慣性法則の一般化になっている．1個の質点の《慣性中心》は自分自身に一致する.

孤立系の力学的性質をしらべるのには，その慣性中心が静止している基準系を利用するのが自然である．そうすることによって，興味をひかない，系全体としての一様な直線運動を考えなくてすむ.

全体として静止している力学系のエネルギーは，普通その**内部エネルギー**$E_{\text{内部}}$とよばれる．これには，系内のおのおのの粒子の運動エネルギーと，それらの相互作用のポテンシャル・エネルギーとが含まれる．全体として速さVで運動している系の全エネルギーは，つぎのような形になる：

$$E=\frac{1}{2}\mu V^2+E_{\text{内部}}. \tag{8.4}$$

この式はほとんど自明ではあるが，直接の証明を与えておこう.

2つの基準系KおよびK'における力学系のエネルギーEおよびE'のあいだには

$$E = \frac{1}{2}\sum_a m_a v_a^2 + U = \frac{1}{2}\sum_a m_a(\boldsymbol{v}'_a + \boldsymbol{V})^2 + U$$
$$= \frac{1}{2}\mu V^2 + \boldsymbol{V}\sum_a m_a \boldsymbol{v}'_a + \sum_a \frac{m_a v_a'^2}{2} + U$$

あるいは

$$E = E' + \boldsymbol{V}\boldsymbol{P}' + \frac{1}{2}\mu V^2 \tag{8.5}$$

という関係がある．この式によって，1つの基準系からほかの基準系へ移るときの，エネルギーの変換法則がきまる．運動量の変換法則が(8.1)で与えられるのと同様である．もし系K'において慣性中心が静止していれば，$\boldsymbol{P}' = 0$，$E' = E_{内部}$であり，したがって(8.4)式が得られる．

問　　題

1つの慣性基準系から他の慣性基準系へ移るときの，作用の変換法則を求めよ．

解　ラグランジアンは，運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーとの差であるから，明らかに，(8.5)と類似の公式にしたがって変換される：

$$L = L' + \boldsymbol{V}\boldsymbol{P}' + \frac{1}{2}\mu V^2.$$

この等式を時間について積分すれば，作用の変換法則を得る：

$$S = S' + \mu\boldsymbol{V}\boldsymbol{R}' + \frac{1}{2}\mu V^2 t.$$

ここで$\boldsymbol{R}'$は，系K'における，慣性中心の位置ベクトルである．

§9. 角 運 動 量

つぎに，**空間の等方性**に起因する保存法則を導こう．

この等方性というのは，孤立した力学系の性質が，空間内での系全体としての任意の回転によって変わらない，ということである．系の無限に小さな回転を考え，その際にラグランジアンが不変であることを要求しよう．

無限小回転のベクトル$\delta\boldsymbol{\varphi}$を導入する．このベクトルの大きさは回転角$\delta\varphi$に等しく，その方向は回転軸に一致している（$\delta\boldsymbol{\varphi}$と同方向をむいた右ネジのまわる向きが，回転の向きに一致するようにする）．

まずはじめに，座標原点（回転軸上にある）から，回転している系の任意の質点にむかう位置ベクトルが，この回転に際してどれだけ変化するかを求める．位置ベクトルの先端の変位の大きさと角度のあいだには

$$|\delta \boldsymbol{r}| = r\sin\theta\cdot\delta\varphi$$

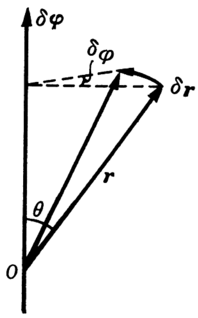


図 5

という関係がある（図5）．このベクトルの方向は $\boldsymbol{r}$ と $\delta\boldsymbol{\varphi}$ とで張られる平面に対して垂直，したがって，明らかに

$$\delta\boldsymbol{r} = [\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{r}]. \tag{9.1}$$

系の回転に際しては，位置ベクトルの方向が変わるだけでなく，すべての粒子の速度も変化する．その際すべてのベクトルは同じ法則にしたがって変換される．したがって，速度の増加分は，静止した座標系で書いて，

$$\delta\boldsymbol{v} = [\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{v}]. \tag{9.2}$$

これらの表現を，回転に対してラグランジアンが不変という条件

$$\delta L = \sum_a\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}\delta\boldsymbol{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a}\delta\boldsymbol{v}_a\right) = 0$$

に代入する．$\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a}$ は定義によって $\boldsymbol{p}_a$，$\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}$ はラグランジュ方程式によって $\dot{\boldsymbol{p}}_a$ と書ける．したがって

$$\sum_a(\dot{\boldsymbol{p}}_a[\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{r}_a] + \boldsymbol{p}_a[\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{v}_a]) = 0.$$

三重積の循環置換をおこない，さらに $\delta\boldsymbol{\varphi}$ をくくり出すと

$$\delta\boldsymbol{\varphi}\sum_a([\boldsymbol{r}_a\dot{\boldsymbol{p}}_a] + [\boldsymbol{v}_a\boldsymbol{p}_a]) = \delta\boldsymbol{\varphi}\frac{d}{dt}\sum_a[\boldsymbol{r}_a\boldsymbol{p}_a] = 0.$$

$\delta\boldsymbol{\varphi}$ は任意であるから

$$\frac{d}{dt}\sum_a[\boldsymbol{r}_a\boldsymbol{p}_a] = 0$$

でなければならない．すなわち，孤立系の運動に際しては，ベクトル量

$$\boldsymbol{M} = \sum_a[\boldsymbol{r}_a\boldsymbol{p}_a] \tag{9.3}$$

が保存されることがわかった．この量を系の**角運動量**（あるいは単に**モーメント**）とよぶ[1]．この量の加法性は明らかである．さらに運動量の場合と同様に，この

1) 回転モーメント，角モーメントという名称も用いられている．

ことは相互作用があるかないかによらない.

加法的な運動の積分はこれでつきる. すべての孤立系は全部で7つの加法的な積分——エネルギーと, 運動量および角運動量のおのおの3つずつの成分——をもつ.

角運動量の定義には粒子の位置ベクトルが関与しているから, 角運動量の値は一般には, 座標原点のえらび方に依存する. 距離 $\boldsymbol{a}$ だけへだたっている2つの原点に関する同一の点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_a$ と $\boldsymbol{r}'_a$ とは $\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{r}'_a + \boldsymbol{a}$ という関係で結ばれる. したがって

$$\boldsymbol{M} = \sum_a [\boldsymbol{r}_a \boldsymbol{p}_a] = \sum_a [\boldsymbol{r}'_a \boldsymbol{p}_a] + [\boldsymbol{a} \sum_a \boldsymbol{p}_a],$$

あるいは

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' + [\boldsymbol{a}\boldsymbol{P}]. \tag{9.4}$$

この式から, 系全体が静止している (すなわち $\boldsymbol{P} = 0$) ときだけ, 角運動量が原点のえらび方によらないことがわかる. 角運動量の値の不定さは, もちろんその保存法則に影響しない. なぜなら孤立系では運動量も保存しているから.

2つの慣性基準系 K および K' についての角運動量の値を結びつける式を導こう. K' は K に対して速度 $\boldsymbol{V}$ で運動しているとする. 系 K および K' の座標原点が, ある瞬間に一致しているとする. そのとき両方の系での粒子の位置ベクトルは一致しており, 速度のほうは $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}'_a + \boldsymbol{V}$ によって結びつけられる. したがって

$$\boldsymbol{M} = \sum_a m_a [\boldsymbol{r}_a \boldsymbol{v}_a] = \sum_a m_a [\boldsymbol{r}_a \boldsymbol{v}'_a] + \sum_a m_a [\boldsymbol{r}_a \boldsymbol{V}].$$

右辺の第1の和は系 K' での角運動量 $\boldsymbol{M}'$ に等しい. 第2の和に慣性中心の位置ベクトル (8.3) を導入して,

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' + \mu[\boldsymbol{R}\boldsymbol{V}] \tag{9.5}$$

を得る. この公式は1つの基準系から他の基準系へ移るときの角運動量の変換の法則をきめる. 運動量およびエネルギーに対しては, (8.1), (8.5) がそのような場合の変換法則を与える.

系 K' のなかで, 与えられた力学系が全体として静止しているときには, $\boldsymbol{V}$ は力学系の慣性中心の速度であり, $\mu\boldsymbol{V}$ はその全運動量 $\boldsymbol{P}$ である (K に関して). そのときには

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' + [\boldsymbol{R}\boldsymbol{P}]. \tag{9.6}$$

いいかえれば，力学系の角運動量 $\boldsymbol{M}$ は，その力学系が静止している基準系に関する角運動量——《固有角運動量》と，力学系全体としての運動に関する角運動量 $[\boldsymbol{RP}]$ とからなりたっている．

角運動量（任意の座標原点に対する）の3つの成分すべての保存法則は孤立系についてだけ成立するのであるが，外場が存在する系についても，もっと制限された形でこの保存法則は成立する．上述の導き方からわかるとおり，外場がある軸について対称であれば，角運動量のその軸への射影はいつでも保存される．なぜならば，この軸のまわりの任意の回転に対して系の力学的性質は変わらないからである．この場合，もちろん，角運動量は，この軸の上にある点について定義しなければならない（その点を座標原点とする）．

この種の場合のうちもっとも重要なのは，中心対称の場である．中心対称の場というのは，ポテンシャル・エネルギーが空間内のあるきまった点（中心）からの距離だけに依存する場である．こういう場のなかの運動に際しては，中心を通る任意の軸の上への角運動量の射影が保存することは明らかである．いいかえれば，空間内の任意の点に関してではなく，場の中心に関して定義された角運動量ベクトル $\boldsymbol{M}$ が保存される．

もう1つの例：z 軸の方向をむいた一様な場．そのなかでは M_z が保存する．さらに座標原点は任意にえらんでよい．

任意の軸（z 軸とよぼう）の上への角運動量の射影はつぎの式からラグランジアンの微分によって求められることを注意しておく：

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a}. \tag{9.7}$$

ここで座標 φ は z 軸のまわりの回転角である．これは角運動量の保存法則の導き方の特質からも明らかであるが，直接に確認することもできる．円柱座標 r, φ, z では（$x_a = r_a \cos\varphi_a$，$y_a = r_a \sin\varphi_a$ を代入する）

$$M_z = \sum_a m_a(x_a\dot{y}_a - y_a\dot{x}_a) = \sum_a m_a r_a^2 \dot{\varphi}_a. \tag{9.8}$$

一方，この書きかえによってラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}\sum_a m_a(\dot{r}_a^2 + r_a^2\dot{\varphi}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U$$

となる．これを (9.7) へ代入すれば (9.8) が得られる．

問　題

1. 粒子の角運動量のデカルト座標系での3つの成分とその絶対値の大きさを，円柱座標 r, φ, z をつかって書き表わせ.

解

$$M_x = m\sin\varphi(r\dot{z} - z\dot{r}) - mrz\dot{\varphi}\cos\varphi,$$
$$M_y = m\cos\varphi(z\dot{r} - r\dot{z}) - mrz\dot{\varphi}\sin\varphi,$$
$$M_z = mr^2\dot{\varphi},$$
$$M^2 = m^2r^2\dot{\varphi}^2(r^2 + z^2) + m^2(r\dot{z} - z\dot{r})^2.$$

2. 同じことを球座標 r, θ, φ をつかっておこなえ.

解

$$M_x = -mr^2(\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi),$$
$$M_y = mr^2(\dot{\theta}\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi),$$
$$M_z = mr^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi},$$
$$M^2 = m^2r^4(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2).$$

3. つぎのような場のなかでの運動に際して，運動量 $\boldsymbol{P}$ および角運動量 $\boldsymbol{M}$ のどの成分が保存されるか.

a) 無限にひろがった一様な平面の場.

解： P_x, P_y, M_z（無限にひろがった平面を x, y 平面とする).

b) 無限に長い一様な円柱の場.

解： M_z, P_z（z 軸を円柱の軸とする).

c) 無限に長い一様なプリズムの場.

解： P_z（プリズムの軸は z 軸に平行とする).

d) 2つの点の場.

解： M_z（2つの点は z 軸上にあるものとする).

e) 無限にひろがった一様な半平面の場.

解： P_y（半平面は y 軸で区切られた x, y 平面とする).

f) 一様な円錐の場.

解： M_z（円錐の軸を z 軸とする).

g) 一様な円環の場.

解： M_z（円環の軸を z 軸とする).

h) 無限にのびた一様な円柱状らせんの場.

解　ラグランジアンはらせんの軸（z 軸）のまわりに角度 $\delta\varphi$ だけ回転し，さらにこの軸にそって $\frac{h}{2\pi}\delta\varphi$（$h$：らせんの歩み）前進することに対して不変である．したがって

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L}{\partial \varphi}\delta\varphi = \left(\dot{P}_z \frac{h}{2\pi} + \dot{M}_z\right)\delta\varphi = 0.$$

ゆえに

$$M_z + \frac{h}{2\pi}P_z = \text{const.}$$

§ 10. 力学的相似

ラグランジアンは任意定数倍しても，ラグランジュ方程式は，明らかに変化しない．この事情（すでに §2 で注意しておいた）は，いくつかの重要な場合に，運動方程式を具体的に積分することなしに，運動についてある本質的な結論をひき出す可能性を与える．

ポテンシャル・エネルギーが座標の同次関数——つまりつぎの関係

$$U(\alpha \boldsymbol{r}_1, \alpha \boldsymbol{r}_2, \cdots, \alpha \boldsymbol{r}_n) = \alpha^k U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n) \qquad (10.1)$$

をみたしているような場合がその一例である．ここで α は定数，k は同次関数の次数である．

すべての座標を α 倍すると同時に時間を β 倍する変換

$$\boldsymbol{r}_a \to \alpha \boldsymbol{r}_a, \qquad t \to \beta t$$

を考えよう．すべての速度 $\boldsymbol{v}_a = \dfrac{d\boldsymbol{r}_a}{dt}$ はこの場合 α/β 倍になり，運動エネルギーは α^2/β^2 倍になる．ポテンシャル・エネルギーのほうは α^k 倍になる．α と β とのあいだに

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k \qquad \text{すなわち} \qquad \beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}}$$

の関係があるときには，ラグランジアンは全体として定数 α^k 倍されることになる．すなわち方程式は不変にとどまる．

粒子のすべての座標を同じ倍率だけ変化させるということは，ある軌跡から，それと幾何学的に相似でその倍率だけ大きさのちがうもう1つの軌跡に移ることである．したがって，つぎのように結論できる：もしポテンシャル・エネルギーが座標（デカルト座標）の k 次の同次関数であるならば，運動方程式は一連の幾何学的に相似な軌跡をえがき，その場合すべての運動の時間（相似な軌跡の上の互いに対応する点のあいだを運動する時間）は

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}} \qquad (10.2)$$

の比をなす．ここで l'/l は2つの軌跡の大きさの比である．時間だけでなく，対応する軌跡上の対応する時刻における，任意の力学的量の値も比 l'/l の一定のベキで表わされる．たとえば速さ，エネルギーおよび角運動量については，

$$\frac{v'}{v}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{k}{2}},\qquad \frac{E'}{E}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{k},\qquad \frac{M'}{M}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{1+\frac{k}{2}} \tag{10.3}$$

説明のために二，三の例をあげよう．

すでに見たように，微小振動の場合にはポテンシャル・エネルギーは座標の2次関数で表わされる（$k=2$）．（10.2）からこの振動の周期が振幅によらないことがわかる．

一定の力の場ではポテンシャル・エネルギーは座標の1次の関数（（5.8）を見よ），すなわち $k=1$ である．（10.2）から

$$\frac{t'}{t}=\sqrt{\frac{l'}{l}}.$$

したがって，たとえば重力場のなかでの落下では，落下時間の2乗は，はじめの高さに比例する．

ニュートンの2物体間の万有引力，あるいは，2つの荷電体間のクーロン相互作用では，ポテンシャル・エネルギーは粒子間の距離に反比例する．すなわち，$k=-1$ 次の座標の同次関数である．このときには

$$\frac{t'}{t}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{3/2}$$

これによって，たとえば公転周期の自乗は，その軌道半径の3乗に比例する（いわゆる**ケプラーの第3法則**）と結論することができる．

ポテンシャル・エネルギーが座標と同次関数で，系の運動が空間のある領域内だけに限られている場合には，運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーのあいだには，きわめて簡単な関係がなりたつ．これは**ビリアル定理**として知られている．

運動エネルギー T は速さの2乗の関数であるから，同次関数についてのオイラーの定理によって

$$\sum_a \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{v}_a}\boldsymbol{v}_a=2T,$$

あるいは，運動量 $\dfrac{\partial T}{\partial \boldsymbol{v}_a}=\boldsymbol{p}_a$ をもちいて

$$2T = \sum_a \boldsymbol{p}_a \boldsymbol{v}_a = \frac{d}{dt}\left(\sum_a \boldsymbol{p}_a \boldsymbol{r}_a\right) - \sum_a \boldsymbol{r}_a \dot{\boldsymbol{p}}_a. \tag{10.4}$$

この等式を時間について平均しよう．時間についての任意の関数 $f(t)$ の平均値を

$$\bar{f} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)dt$$

で定義する．$f(t)$ が有界な（すなわち無限に大きな値をとることのない）関数 $F(t)$ の時間についての導関数 $\dfrac{dF(t)}{dt}$ であると，その平均値がゼロになってしまうことは容易に導かれる．実際

$$\bar{f} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{dF}{dt}dt = \lim_{\tau\to\infty}\frac{F(\tau)-F(0)}{\tau} = 0.$$

いまの系が空間の限られた領域のなかで，しかも有限の速さで運動していると仮定しよう．そうすると $\sum \boldsymbol{r}_a \boldsymbol{p}_a$ は有界であり，等式（10.4）の右辺第1項にあるそれの平均値はゼロになる．第2項の $\dot{\boldsymbol{p}}_a$ をニュートンの式にしたがって $-\dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}$ でおきかえれば

$$2\overline{T} = \overline{\sum_a \boldsymbol{r}_a \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}} \tag{10.5}$$

が得られる[1]．もしポテンシャル・エネルギーがすべての位置ベクトル $\boldsymbol{r}_a$ についての k 次の同次関数であるとすると，オイラーの定理によって，（10.5）はつぎのようになる：

$$2\overline{T} = k\overline{U}. \tag{10.6}$$

これが求める関係式である．

$\overline{T}+\overline{U}=\overline{E}=E$ であるから関係式（10.6）は，つぎのような形にも書ける：

$$\overline{U} = \frac{2}{k+2}E, \qquad \overline{T} = \frac{k}{k+2}E. \tag{10.7}$$

これは $\overline{U}$ および $\overline{T}$ を系の全エネルギーで表わしている．

とくに微小振動（$k=2$）に対しては，

$$\overline{T} = \overline{U}.$$

すなわち，運動エネルギーの平均値とポテンシャル・エネルギーの平均値とは一致する．ニュートンの相互作用（$k=-1$）に対しては

$$2\overline{T} = -\overline{U}.$$

1) 等式（10.5）の右辺の量は系のビリアルとよばれる．

このとき $E=-\overline{T}$ となるが，これはこの相互作用のもとで空間の有限な領域で運動がおこなわれるのは，全エネルギーが負のときだけだということに対応している（§ 15を見よ）.

問　題

1. 同じポテンシャル・エネルギーのもとで異なる質量をもつ質点が同一の軌跡を運動する．それぞれが運動に要する時間のあいだの比を求めよ．

解

$$\frac{t'}{t}=\sqrt{\frac{m'}{m}}.$$

2. ポテンシャル・エネルギーを定数倍だけ変化させたとき，同一の軌道にそっての運動の時間はどう変化するか.

解

$$\frac{t'}{t}=\sqrt{\frac{U}{U'}}.$$

第3章　運動方程式の積分

§ 11.　1次元運動

自由度が1の系の運動を1次元運動とよぶ．静止した外場のなかにあるこのような系のラグランジアンのもっとも一般的な形は，

$$L = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - U(q) \tag{11.1}$$

である．ここで $a(q)$ は一般座標 q のある関数である．とくに q がデカルト座標（x と書く）であれば，

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x). \tag{11.2}$$

このラグランジアンに対応する運動方程式は一般的な形に積分される．この場合には運動方程式を書き下す必要さえなく，ただちにその第1積分，すなわちエネルギーの保存法則を表わす式

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E$$

から出発すればよい．これは1階の微分方程式であり，変数分離の方法で積分される．すなわち，

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}$$

から

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + \text{const.} \tag{11.3}$$

全エネルギー E と積分定数 const とが，運動方程式の解の2つの任意定数の役割をはたしている．

運動エネルギーは本質的に正の量であるから，運動に際して全エネルギーは，つねにポテンシャル・エネルギーよりも大きい．すなわち，運動は，空間のなかの $U(x) < E$ をみたす領域内だけでおこなわれる．

たとえば $U(x)$ が図6に示すような形をしているとしよう．この図の上に，全

エネルギーの値に対応する水平線をひけば，ただちに運動の可能な領域が明らかになる．図6に示したような場合には，運動はABの領域かあるいはCの右側だけで可能である．

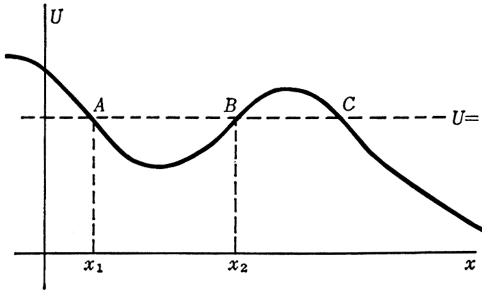


図 6

ポテンシャル・エネルギーが全エネルギーに等しくなる

$$U(x)=E \tag{11.4}$$

をみたす点xは運動の境界をきめる．そのような点は，速度がゼロになる点**停留点**である．もし運動の領域がそのような2つの点で境界づけられているならば，運動は空間の限られた領域のなかでおこなわれる．それを**有界である**という．もし運動の領域が限られていないか，あるいは一方の側だけで限られているならば，運動は**有界でない**，つまり粒子は無限遠までゆきつく．

1次元の有界な運動というのは振動である．すなわち，粒子は2つの限界点のあいだで周期的に同じ運動をくりかえす（図6ではx_1とx_2のあいだのポテンシャルの盆地ABにおいて）．この場合可逆性という一般的性質(10ページ)によって，x_1からx_2まで動く時間はx_2からx_1への逆の運動にかかる時間に等しい．したがって振動の周期T，つまり点がx_1からx_2へ，ついでx_2からx_1まで動くあいだの時間は，x_1x_2間を動く時間の2倍に等しい．それは（11.3）によって，

$$T(E)=\sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} \tag{11.5}$$

である．ここで上限x_1，下限x_2は与えられたEに対する式（11.4）の根を表わしている．この公式は，運動の周期を全エネルギーEの関数として与える．

問　題

1. 単振子（重力場のなかで長さlの糸でつるされた質量mの質点）の周期をその振幅の関数として決定せよ．

解　単振子のエネルギーは

$$E = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl\cos\varphi = -mgl\cos\varphi_0.$$

ここでφは鉛直線からのかたむきの角度，φ_0は最大のかたむきの角度である．周期を角φがゼロからφ_0まで変わるあいだの時間の4倍として求めると，

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

$\sin\frac{\varphi}{2}\Big/\sin\frac{\varphi_0}{2} = \sin\xi$ という置換によって，この積分をつぎのような形に書く．

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right),$$

ここで

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\xi}}$$

で，第1種の完全楕円積分とよばれるものである．$\sin\frac{\varphi_0}{2}\approx\frac{\varphi_0}{2}\ll 1$ のとき（微小振動），関数$K(k)$を展開すると

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2 + \cdots\right)$$

となる．この展開の第1項は周知の初等的な公式である．

2. つぎの各ポテンシャル・エネルギーの場のなかで，質量mの質点が運動しているとき，その振動の周期をエネルギーの関数として表わせ．

a)　$U = A|x|^n$.

解

$$T = 2\sqrt{2m}\int_0^{(E/A)^{1/n}}\frac{dx}{\sqrt{E - Ax^n}} = \frac{2\sqrt{2m}\,E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}}{A^{1/n}}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1 - y^n}}.$$

おきかえ $y^n = u$ によって，積分はいわゆるオイラーのB積分になり，Γ関数で表わされる：

$$T = \frac{2\sqrt{2\pi m}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{nA^{1/n}\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)}E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}.$$

TのEに対する依存のしかたは力学的相似の法則(10.2)，(10.3) に対応している．

b)　$U = -\dfrac{U_0}{\cosh^2\alpha x}$,　　　$-U_0 < E < 0$.

解

$$T = \frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{|E|}}.$$

c) $U = U_0 \tan^2 \alpha x.$

解

$$T = \frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{E+U_0}}.$$

§ 12. 振動の周期によるポテンシャル・エネルギーの決定

ある場において粒子が振動しており，その周期TがエネルギーEの関数としてわかっているとき，その場のポテンシャル・エネルギー$U(x)$の様子をどの程度まで逆に知ることができるかを検討してみよう．数学的に見れば，問題は(11.5)式を，$U(x)$を未知関数，$T(E)$を既知関数とする積分方程式として解くことにほかならない．

この場合，求めている関数$U(x)$が考えている空間の領域でただ1つだけの極小をもつことを仮定する．この条件をみたさない解の存在の可能性については問わないことにする．便宜のため座標原点をポテンシャル・エネルギーの極小点にとり，その点におけるポテンシャル・エネルギーの値をゼロにとる（図7）．

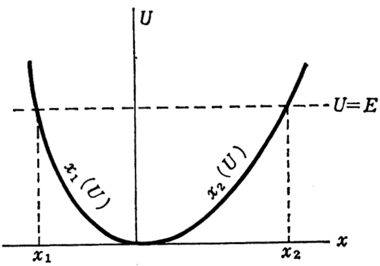


図 7

座標 x を U の関数とみなして積分(11.5)を変形しよう．関数$U(x)$は，2価である——ポテンシャル・エネルギーのおのおのの値に対し2つのことなったxの値が存在する．これに応じて積分(11.5)（dxを$\dfrac{dx}{dU}dU$におきかえる）は，$x=x_1$から$x=0$までと，$x=0$から$x=x_2$までとの2つの積分の和に書きかえられる．これらの2つの区間でのxのUに対する関数関係を，それぞれ$x=x_1(U)$，$x=x_2(U)$と書くことにしよう．

dUについての積分の上限，下限は明らかにEおよび0である．したがって

$$T(E) = \sqrt{2m}\int_0^E \frac{dx_2(U)}{dU}\frac{dU}{\sqrt{E-U}} + \sqrt{2m}\int_E^0 \frac{dx_1(U)}{dU}\frac{dU}{\sqrt{E-U}}$$

$$= \sqrt{2m}\int_0^E \left[\frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU}\right]\frac{dU}{\sqrt{E-U}}$$

を得る．

この等式の両辺を $\sqrt{\alpha-E}$ で割り（α はパラメター），E についてゼロから α まで積分する：

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha-E}} = \sqrt{2m}\int_0^\alpha \int_0^E \left[\frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU}\right]\frac{dU\,dE}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}},$$

積分の順序を交換して：

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)}{\sqrt{\alpha-E}}dE = \sqrt{2m}\int_0^\alpha \left[\frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU}\right]dU\int_U^\alpha \frac{dE}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}}.$$

dE についての積分は初等的におこなわれ，π になることがわかる． そのあとでは dU についての積分は自明であり，したがって

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha-E}} = \pi\sqrt{2m}[x_2(\alpha) - x_1(\alpha)]$$

（ここで $x_2(0)=x_1(0)=0$ を考慮している）．ここでふたたび α を U におきかえ，最後に

$$x_2(U) - x_1(U) = \frac{1}{\pi\sqrt{2m}}\int_0^U \frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}}. \qquad (12.1)$$

このように既知関数 $T(E)$ から差 $x_2(U)-x_1(U)$ がきまる．関数 $x_2(U)$ および $x_1(U)$ 自身は不安定のままである． このことはつぎのことを意味している．周期がエネルギーの関数として与えられているとき，そのような周期を導く曲線 $U=U(x)$ は1つでなく無数に存在する．ただし，そのすべてに対し，同一の U の値に対応する2つの x の値の差は等しい．

解の多様性は曲線 $U=U(x)$ が縦軸に対して対称であるように，すなわち

$$x_2(U) = -x_1(U) \equiv x(U)$$

となることを要求すれば消える．この場合には，式（12.1）は $x(U)$ に対して一意的な表現

$$x(U) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}}\int_0^U \frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}} \qquad (12.2)$$

を与える．

§13. 換算質量

相互作用をしている2つの物体だけからなる系の運動という非常に重要な問題（**2体問題**）には，完全な解が一般的な形で与えられる．

この問題解決への準備として，系の運動を，慣性中心の運動と，慣性中心に対する各点の運動とに分解することによって，問題がどのように簡単化されるかを考えよう.

相互作用している2つの粒子のポテンシャル・エネルギーは，そのあいだの距離，すなわちそれらの位置ベクトルの差の絶対値だけに依存している．したがって，この系のラグランジアンは

$$L = \frac{m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^2}{2} - U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|). \qquad (13.1)$$

両質点相互の距たりのベクトル

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$$

を導入し，座標原点を慣性中心に移す：

$$m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 = 0.$$

この2つの等式から，

$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r} \qquad (13.2)$$

を得る．これらの表現を（13.1）に代入して

$$L = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - U(r). \qquad (13.3)$$

ここで

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (13.4)$$

という量を導入した．この量mを**換算質量**という．関数（13.3）は，固定した座標原点について中心対称な外場$U(r)$のなかで運動している質量mの1個の質点のラグランジアンに形式的に一致している.

このように，相互作用している2つの質点の運動の問題は，与えられた外場$U(r)$のなかの1つの質点の問題に還元される．その問題の解 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ から，質量がm_1, m_2の質点のおのおのの軌跡$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1(t)$，$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_2(t)$（共通の慣性中心を原点とする）は，式（13.2）によって別々に得られる.

問　題

質量Mの1つの質点と，n個の，互いに同一な質量mをもった質点とからなる系がある．慣性中心の運動を消去してn個の質点の運動についての問題に導け.

解　$\boldsymbol{R}$を質点Mの位置ベクトルとし，$\boldsymbol{R}_a(a=1,2,\cdots,n)$ を質量mの粒子の位置ベクトルとする．質点Mから質点mへむかうベクトル

$$\boldsymbol{r}_a=\boldsymbol{R}_a-\boldsymbol{R}$$

を導入し，座標原点を慣性中心にとる：

$$M\boldsymbol{R}+m\sum_a \boldsymbol{R}_a=0.$$

これらの等式から

$$\boldsymbol{R}=-\frac{m}{M+nm}\sum_a \boldsymbol{r}_a, \qquad \boldsymbol{R}_a=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}_a.$$

これらの表現をラグランジアン

$$L=\frac{M\dot{\boldsymbol{R}}^2}{2}+\frac{m}{2}\sum_a \dot{\boldsymbol{R}}_a^2-U$$

に代入し，

$$L=\frac{m}{2}\sum_a \boldsymbol{v}_a^2-\frac{m^2}{2(M+nm)}\left(\sum_a \boldsymbol{v}_a\right)^2-U$$

を得る．ここで，$\boldsymbol{v}\equiv\dot{\boldsymbol{r}}_a$である．ポテンシャル・エネルギーは粒子間の距離だけに依存し，したがってベクトル$\boldsymbol{r}_a$の関数として表わされる．

§ 14.　中心力の場における運動

2個の物体の運動についての問題を1個の物体の運動の問題に還元したうえで，われわれは中心力の外場における粒子の運動を決定する問題に移ろう．その外場では，ポテンシャル・エネルギーはあるきまった固定点までの距離だけできまるとする．そのような場は**中心力の場**とよばれる．この場合，粒子に働く力

$$\boldsymbol{F}=-\frac{\partial U(r)}{\partial \boldsymbol{r}}=-\frac{dU}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

の絶対値の大きさはrだけに依存し，その各点での方向は位置ベクトルの方向に一致する．

すでに§9で示したように，中心力の場における運動では場の中心についての系の角運動量は保存する．1つの質点に対して角運動量は

$$\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{r}\boldsymbol{p}].$$

ベクトル$\boldsymbol{M}$と$\boldsymbol{r}$とは互いに垂直であるから，$\boldsymbol{M}$が一定であるということは，粒子の運動のあいだ，その位置ベクトルがずっと一平面（$\boldsymbol{M}$に垂直な）内にとどまっていることを意味する．

こうして中心力場における粒子の運動の軌跡は完全に1つの平面内にある．そ

の平面内に極座標 r, φ をとってラグランジアンをつぎのように書く ((4.5) 参照):

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r). \tag{14.1}$$

この関数は座標 φ を陽には含んでいない. ラグランジアンに陽に含まれないすべての一般座標 q_i は**循環的**であるとよばれる. ラグランジュ方程式によって, この座標に対しては

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

すなわち, その座標に対応する一般運動量 $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$ は運動の積分である. この事情は循環座標が存在する場合の運動方程式の積分を簡単化する.

いまの場合, 一般運動量は

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$$

で, 角運動量 $M_z = M$ に一致する ((9.6) を見よ). したがって, すでに知っている角運動量の保存法則

$$M = mr^2\dot{\varphi} = \text{const} \tag{14.2}$$

にもどることになる. 1個の粒子の中心力場のなかでの平面運動に対しては, この法則に対して簡単な幾何学的解釈を与えることができる. 表式 $\frac{1}{2}r\cdot rd\varphi$ は2つの無限に近い動径ベクトルおよび軌跡の線素によって囲まれた扇形の面積を表わしている (図8). それを df で表わし, 粒子の各運動量を

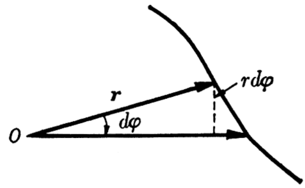


図 8

$$M = 2m\dot{f} \tag{14.3}$$

と書こう. ここで導関数 $\dot{f}$ を**面積速度**という. したがって, 角運動量の保存則は, 面積速度が不変であること——同一の時間内に, 運動している粒子の動径ベクトルは同一の面積を掃くこと (**ケプラーの第2法則**[1]) を表わしている.

中心力の場における粒子の運動に関する問題の完全な解答は, 直接に運動方程式によらなくても, エネルギーおよび角運動量の保存法則に基づいて, 容易に得

1) 中心力の場のなかで運動している粒子に対する角運動量の保存法則は, **面積の積分**とよばれることもある.

られる．$\dot{\varphi}$を（14.2）によってMで表わし，それをエネルギーを表わす式へ代入してつぎの式を得る：

$$E=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+U(r)=\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{M^2}{2mr^2}+U(r). \tag{14.4}$$

したがって，

$$\dot{r}\equiv\frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(r)]-\frac{M^2}{m^2r^2}}. \tag{14.5}$$

変数を分離し，積分して，

$$t=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(r)]-\frac{M^2}{m^2r^2}}}+\text{const.} \tag{14.6}$$

さらに（14.2）を

$$d\varphi=\frac{M}{mr^2}dt$$

の形に書き，（14.5）から得られるdtを代入し積分をおこなうと，

$$\varphi=\int\frac{(M/r^2)dr}{\sqrt{2m[E-U(r)]-\frac{M^2}{r^2}}}+\text{const.} \tag{14.7}$$

（14.6）式および（14.7）式は，提起された問題に対するもっとも一般的な解である．（14.7）はrとφとの関係——すなわち軌跡の方程式をきめる．（14.6）式は運動している質点の，中心からの距離rを，陽にではないが，時間の関数として決定している．角度φが時間とともに単調に変わってゆくこと——（14.2）式からわかるように$\dot{\varphi}$はいつまでもその符号を変えないこと——に注意しよう．

（14.4）式は，運動の動径部分が《有効》ポテンシャル

$$U_{\text{有効}}=U(r)+\frac{M^2}{2mr^2} \tag{14.8}$$

の場における1次元運動とみなせるということを示している．$M^2/2mr^2$という量を遠心力のポテンシャル・エネルギーとよぶ．

$$U(r)+\frac{M^2}{2mr^2}=E \tag{14.9}$$

を満足するrの値は，運動がおこなわれる領域の限界を中心からの距離について決定する．（14.9）がなりたつときには，動径速度$\dot{r}$はゼロになる．これはしかし粒子が停止することを意味しない（1次元運動のときにはそうであったが）．なぜなら，角速度$\dot{\varphi}$がゼロにならないから，等式$\dot{r}=0$は関数$r(t)$が増加から

減少へ，あるいはその逆にむかう点，軌跡の《転回点》を表わしている．

もし変数 r の許容領域がただ1つの条件 $r \geqq r_{\min}$ だけで制限されるとすれば，粒子の運動は有界でない．すなわち軌跡は無限遠から到来し無限遠へと去ってゆく．

もし変数 r の領域が2つの限界 $r_{\min}$ と $r_{\max}$ とをもっていれば，運動は有界となり，軌跡はすべて半径が $r=r_{\max}$ と $r=r_{\min}$ の2つの円にはさまれた環状領域の内部だけを通る．このことは，しかし，軌跡がかならず閉じた曲線になる，ということを意味してはいない．r が $r_{\max}$ から $r_{\min}$ に変化し，ふたたびまた $r_{\max}$ にもどるあいだに，動径ベクトルは（14.7）にしたがって角度 $\Delta\varphi$ だけ変化する：

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}}}. \tag{14.10}$$

軌跡が閉じるための条件は，この角度が 2π の有理数倍になっていること，すなわち m, n を整数として，$\Delta\varphi = 2\pi m/n$ である．この場合，この周期が n 回くりかえされるあいだに，粒子の動径ベクトルはちょうど m 回転してその最初の位置にもどる．すなわち軌跡は閉じる．

しかしこのような場合は例外的であって，任意の $U(r)$ に対しては $\Delta\varphi$ は 2π の有理数倍にならない．したがって，一般の場合には，有界な運動の軌跡は閉じない．軌跡は最大の距離と最小の距離のあいだを無限回通りすぎ（たとえば図9に示すように），無限の時間ののちには2つの境界の円のあいだの環状部分をうずめつくす．

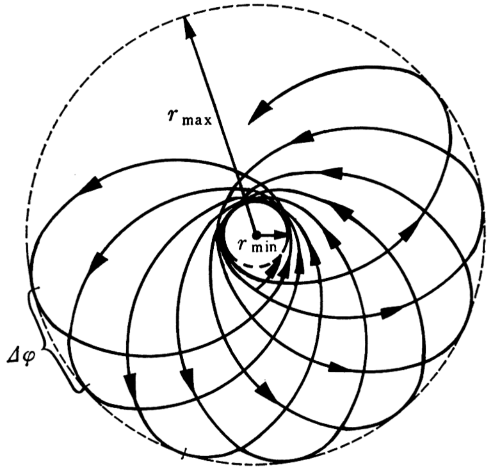


図　9

すべての有界な軌跡が閉じるような中心力の場が，たった2つだけ存在する．それは粒子のポテンシャル・エネルギーが $1/r$ および r^2 に比例する場である．第1のものはつぎの節で扱う．第2のものは3次元振動子に相当する（§ 23の問題3を見よ）．

転回点では，(14.5) の平方根は（(14.6) および (14.7) 式のなかの被積分関数も）その符号を変える．いま角度 φ を転回点へひいた動径ベクトルの方向からはかることにすると，この点の両側の軌跡は，同じ r に対してただ φ の符号がちがっているだけであり，このことは軌跡が，転回点へひいた動径ベクトルの方向に関して対称であることを示している．たとえば，$r=r_{\max}$ の任意の点から出発して軌跡をたどり $r=r_{\min}$ の点に達するとする．そのつぎにはこの軌跡と対称の位置にある軌跡を通ってつぎの $r=r_{\max}$ の点に達する，等々．すなわち軌跡の全体は，そのある一部分をそのままの形および対称の位置にひっくりかえした形で反復することにより得られる．このことは有界でない軌跡の場合にもあてはまる．この場合には $r_{\min}$ の転回点から無限遠点までのびる2つの分枝が対称の位置を占めている．

$r\to 0$ で $1/r^2$ の形で無限大になる遠心力のエネルギーが存在する（$M\neq 0$ の運動では）ために，場が引力の性質をもっているときにでも，粒子が場の中心に到達できないことがおこる．粒子が中心に《衝突》するのは，ポテンシャル・エネルギーが，$r\to 0$ で十分に速く $-\infty$ に近づくときにのみ可能である．不等式

$$\frac{m\dot{r}^2}{2}=E-U(r)-\frac{M^2}{2mr^2}>0$$

あるいは

$$r^2U(r)+\frac{M^2}{2m}<Er^2$$

から，条件

$$r^2U(r)\Big|_{r\to 0}<-\frac{M^2}{2m} \tag{14.11}$$

のときにだけ r がゼロになりうることがわかる．すなわち，$U(r)$ は $-\alpha/r^2$，ただし $\alpha>M^2/2m$ か，あるいは $-1/r^n$，ただし $n>2$ のいずれかでなければならない．

問　題

1. 球面振子の運動方程式を積分せよ．球面振子とは，重力場のなかで半径 l の球の表面を運動する質点 m である．

解 球の中心を原点とし，鉛直下向きの方向を極軸とする球座標では，振子のラグランジアンは

$$L=\frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2)+mgl\cos\theta.$$

座標 φ は循環座標である．したがって一般運動量 p_φ（角運動量の z 成分に一致する）は保存される：

$$ml^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}=M_z=\text{const.} \tag{1}$$

エネルギーは

$$E=\frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2)-mgl\cos\theta=\frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2}+\frac{M_z^2}{2ml^2\sin\theta}-mgl\cos\theta. \tag{2}$$

$\dot{\theta}$ について解き，変数分離法をつかうとつぎの式を得る．

$$t=\int\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}[E-U_{\text{有効}}(\theta)]}}. \tag{3}$$

ここで《有効ポテンシャル・エネルギー》は，

$$U_{\text{有効}}(\theta)=\frac{M_z^2}{2ml^2\sin^2\theta}-mgl\cos\theta.$$

角度 φ に対しては，（1）をもちいて

$$\varphi=\frac{M_z}{l\sqrt{2m}}\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{E-U_{\text{有効}}(\theta)}} \tag{4}$$

が得られる．積分 (3), (4) はそれぞれ第1種，第3種の楕円積分に帰する．

角度 θ に関する運動の領域は条件 $E>U_{\text{有効}}$ できめられ，その境界は $E=U_{\text{有効}}$ できまる．後者は $\cos\theta$ について3次方程式となり，それは -1 から $+1$ までの区間で2つの根をもつ．その根は球面上の2つの緯線の位置を決定し，軌跡全体はこの2つの緯線のあいだに含まれる．

2. 重力場のなかで，頂点を下方にして鉛直におかれた円錐（頂角 2α）の表面にそって運動する質点の運動方程式を積分せよ．

解 円錐の頂点を原点とし鉛直線を極軸とする球座標では，ラグランジアンは

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}+r^2\sin^2\alpha\cdot\dot{\varphi}^2)-mgr\cos\alpha.$$

座標 φ は循環座標であるから，ここでも

$$M_z=mr^2\sin^2\alpha\cdot\dot{\varphi}$$

は保存する．エネルギーは

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha.$$

問題1と同様にして，

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{\text{有効}}(r)]}},$$

$$\varphi = \frac{M_z}{\sin^2\alpha\sqrt{2m}}\int\frac{dr}{r^2\sqrt{E - U_{\text{有効}}(r)}},$$

$$U_{\text{有効}}(r) = \frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha$$

が得られる．

条件 $E = U_{\text{有効}}(r)$ は（$M_z \neq 0$ のとき）r についての3次方程式となり，それは2つの正根をもつ．これは円錐上の水平な2つの円の位置を決定し，軌跡はすべてこの円のあいだに含まれる．

3. 支点（それ自身質量 m_1 をもつ）が水平方向に運動できる平面振子の運動方程式を積分せよ（図2参照）．

解 ラグランジアンは §5，問題2で求められている．そのなかで座標 x は循環的である．したがって系の全運動量の水平方向の成分に一致する一般運動量 P_x は保存される：

$$P_x = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi = \text{const}. \qquad (1)$$

系が全体として静止しているとみなすことはいつでも可能である．そのとき const = 0，そして方程式（1）の積分は

$$(m_1 + m_2)x + m_2 l\sin\varphi = \text{const} \qquad (2)$$

を与える．この式は系の慣性中心が水平方向に動かないことを示している．（1）を使うとエネルギーはつぎの形になる：

$$E = \frac{m_2 l^2\dot{\varphi}^2}{2}\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\cos^2\varphi\right) - m_2 gl\cos\varphi.$$

したがって

$$t = l\sqrt{\frac{m_2}{2(m_1 + m_2)}}\int\sqrt{\frac{m_1 + m_2\sin^2\varphi}{E + m_2 gl\cos\varphi}}\,d\varphi.$$

質点 m_2 の座標 $x_2 = x + l\sin\varphi, y_2 = l\cos\varphi$ を，(2) をもちいて φ で表わせば，この粒子の軌道が水平方向に $lm_1/(m_1 + m_2)$，鉛直方向に l の半径をもつ楕円の一部分であることがわかる．$m_1 \to \infty$ では，円にそってゆれる普通の単振子にもどる．

§ 15. ケプラー問題

中心力の場のうちでとくに重要なのは，ポテンシャル・エネルギーが距離 r に

反比例し，したがって，力が距離の2乗 r^2 に反比例する場である．ニュートンの重力の場，クーロンの静電場はこれに入る．重力の場は引力であり，クーロン場は引力，斥力の両方である．

はじめに引力の場合を考えよう：その場合

$$U = -\frac{\alpha}{r}. \tag{15.1}$$

α は正の数である．《有効》ポテンシャル・エネルギー

$$U_{\text{有効}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{15.2}$$

のグラフを図10に示す．それは $r\to 0$ で $+\infty$ に近づき，$r\to\infty$ でマイナスの側からゼロに漸近する．それは $r = M^2/\alpha m$ で極小値

$$(U_{\text{有効}})_{\min} = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2} \tag{15.3}$$

をとる．このグラフからただちに，$E > 0$ の場合には粒子の運動は有界でなく，$E < 0$ の場合には有界であることがわかる．

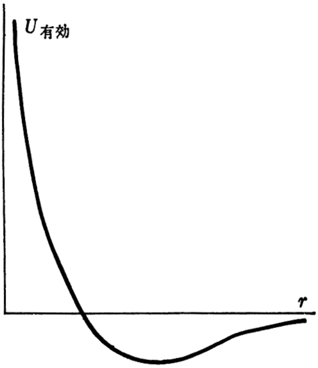


図 10

軌跡の式は一般公式（14.7）をつかって求められる．それに $U = -\dfrac{\alpha}{r}$ を代入し，初等積分をおこなうことによって

$$\varphi = \arccos\frac{\dfrac{M}{r} - \dfrac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \dfrac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + \text{const}$$

を得る．φ の原点を const がゼロになるようにえらび，さらに

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}, \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} \tag{15.4}$$

とおけば，軌跡の式はつぎのように書ける．

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi. \tag{15.5}$$

これは座標原点を焦点とする円錐曲線の方程式であり，p および e はそれぞれ軌道の**通径**および**離心率**とよばれている．われわれの φ の原点のえらび方は，（15.5）からわかるように，$\varphi = 0$ の点を中心からの最短位置にえらぶことにあたっている（この点は軌道の**近日点**ともよばれる）．

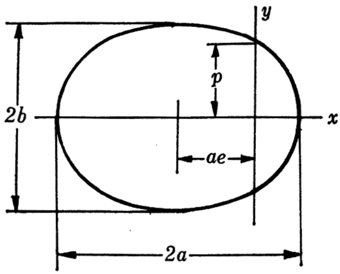


図 11

(15.1) の法則にしたがって相互作用している2体問題では，各粒子の運動は上の場合と等価であって，おのおのの粒子の軌道は2粒子共通の重心を焦点とする円錐曲線で表わされる．

(15.4) からわかるとおり，$E<0$の場合には離心率 $e<1$，すなわち軌道は楕円となり (図11)，運動はこの節のはじめに述べたように有界になっている．解析幾何学の公式によれば，楕円の長半軸，短半軸はそれぞれ

$$a=\frac{p}{1-e^2}=\frac{\alpha}{2|E|}, \qquad b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{M}{\sqrt{2m|E|}} \tag{15.6}$$

である．エネルギーの許される最小値は (15.3) に一致する．このとき $e=0$，すなわち楕円は円になる．長半軸が粒子のエネルギーだけに依存して，角運動量に依存しないことに注意する．場の中心 (楕円の焦点) までの最小および最大の距離はそれぞれ

$$r_{\min}=\frac{p}{1+e}=a(1-e), \qquad r_{\max}=\frac{p}{1-e}=a(1+e) \tag{15.7}$$

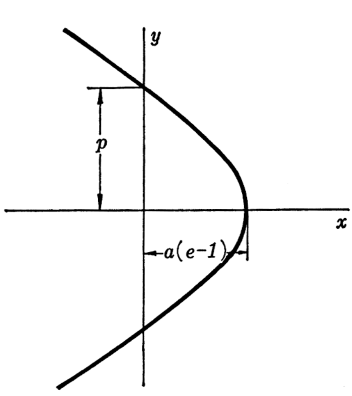


図 12

である．これらの表現(a, eは(15.6), (15.4) で与えられている) は，もちろん直接に方程式 $U_{有効}(r)=E$ の根としても得られる．

楕円を1周する時間，すなわち運動の周期Tを決定するには，(14.3) の《面積積分》の形に表わされた角運動量の保存法則をつかうのが便利である．この等式を時間についてゼロからTまで積分して

$$2mf=TM$$

を得る．ここでfは軌道の面積である．楕円については $f=\pi ab$ であり，式 (15.6) によって

$$T=2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}$$

$$= \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \tag{15.8}$$

を得る．周期の2乗が軌道の大きさの3乗に比例するという事実はすでに §10で示した．周期が粒子のエネルギーだけによることにも注意する．

$E \geqq 0$ の場合には運動は有界でない．もし $E > 0$ であれば，離心率 e は $e > 1$，すなわち軌跡は，図12に示すように，場の中心（焦点）の周囲をまわる双曲線になる．中心から近日点への距離は

$$r_{\min} = \frac{p}{e+1} = a(e-1). \tag{15.9}$$

ここで

$$a = \frac{p}{e^2-1} = \frac{\alpha}{2E}$$

は双曲線の《半軸》である．

$E = 0$ の場合には，離心率 $e = 1$，すなわち粒子は放物線にそって運動する．近日点の距離は $r_{\min} = p/2$ である．このような運動は，粒子が無限遠点で静止した状態から運動を始めた場合におこる．

軌道上を運動する際の，時間による座標の変化は一般公式（14.6）から得られる．この式はつぎのようにして便利なパラメター表示で表わすことができる．

最初に楕円軌道を考える．a, e を（15.4），（15.6）にしたがって導入し，時間を決定する積分（14.6）を，つぎのように書く：

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int\frac{rdr}{\sqrt{-r^2+\frac{\alpha}{|E|}r-\frac{M^2}{2m|E|}}}$$

$$= \sqrt{\frac{ma}{\alpha}}\int\frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}.$$

おきかえ

$$r - a = -ae\cos\xi$$

によって，この積分は

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\int(1-e\cos\xi)d\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi - e\sin\xi) + \text{const}$$

となる．

時間原点を，const をゼロにするようにえらべば，r の t に対する依存性は，結局つぎのようにパラメター的に表示される：

$$r = a(1 - e\cos\xi), \qquad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi - e\sin\xi) \tag{15.10}$$

($t = 0$ の瞬間に粒子は近日点にいる)．粒子のデカルト座標 $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$（x 軸，y 軸はそれぞれ長軸，短軸に平行）も同一のパラメター ξ によって表わすことができる．(15.5) および (15.10) から

$$ex = p - r = a(1 - e^2) - a(1 - e\cos\xi) = ae(\cos\xi - e).$$

一方 y は $\sqrt{r^2 - x^2}$ として得られる．結局，

$$x = a(\cos\xi - e), \qquad y = a\sqrt{1 - e^2}\sin\xi. \tag{15.11}$$

楕円にそっての1回転は，パラメター ξ が0から 2π まで変化することに対応する．

まったく類似の計算によって，双曲線の軌跡に対して

$$\begin{aligned} r &= a(e\cosh\xi - 1), \qquad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(e\sinh\xi - \xi), \\ x &= a(e - \cosh\xi), \qquad y = a\sqrt{e^2 - 1}\sinh\xi. \end{aligned} \tag{15.12}$$

ここでパラメター ξ は $-\infty$ から $+\infty$ までの値を変化する．

斥力の場のなかの運動に移ろう．ここでは

$$U = \frac{\alpha}{r} \tag{15.13}$$

($\alpha > 0$)．この場合，有効ポテンシャル・エネルギー

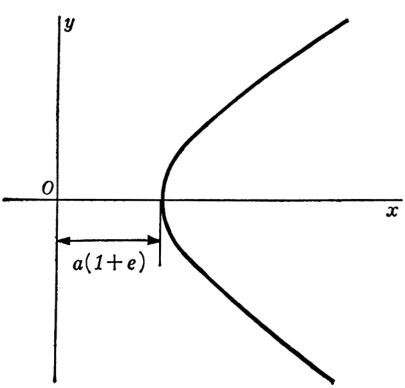


図　13

$$U_{有効} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

は，r が0から∞に変化するのに応じて単調に $+\infty$ から 0 へ減少する．粒子のエネルギーはつねに正であり，運動はいかなる場合にも有界でない．この場合のすべての計算は上の説明とまったく同様である．軌跡は双曲線（あるいは $E = 0$ のときには放物線）になる：

$$\frac{p}{r} = -1 + e\cos\varphi \tag{15.14}$$

(p および e は以前の式 (15.4) で与えられている)．軌跡は図13に示すように，場の中心にふれないで通りすぎる．近日

点の距離は

$$r_{\min} = \frac{p}{e-1}$$

$$= a(e+1). \tag{15.15}$$

時間に対する変化はパラメター表示

$$r = a(e\cosh\xi + 1), \qquad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(e\sinh\xi + \xi),$$
$$x = a(\cosh\xi + e), \qquad y = a\sqrt{e^2-1}\sinh\xi \tag{15.16}$$

で与えられる.

この節の終わりに, $U=\alpha/r$（α の符号は任意）の場のなかの運動の場合, まさにこの場に特有な運動の積分が存在することを示しておく. 直接の計算によって, つぎのことを容易に検証することができる：

$$[\boldsymbol{vM}] + \frac{\alpha \boldsymbol{r}}{r} = \text{const.} \tag{15.17}$$

事実, その時間についての完全導関数は

$$[\dot{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{M}] + \frac{\alpha\boldsymbol{v}}{r} - \frac{\alpha\boldsymbol{r}(\boldsymbol{vr})}{r^3},$$

あるいは $\boldsymbol{M} = m[\boldsymbol{rv}]$ とおきかえて,

$$m\boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{v}}) - m\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{v}}) + \frac{\alpha\boldsymbol{v}}{r} - \frac{\alpha\boldsymbol{r}(\boldsymbol{vr})}{r^3};$$

ここで運動方程式にしたがって $m\dot{\boldsymbol{v}} = \alpha\boldsymbol{r}/r^3$ であることを考慮すれば, この表現が 0 になることがわかる.

保存しているベクトル (15.17) は, 焦点より近日点にむかう主軸の方向にむき, 一方, 大きさは αe に等しい. このことは, 近日点においてもっとも容易に確認することができる.

運動の積分 (15.17) が, 積分 M および E と同様, 粒子の状態（位置と速度）の 1 価の関数になっていることを強調しておく. われわれは §52 において, このような補足的な 1 価の積分の存在がいわゆる運動の縮重に関係していることを示す.

問　題

1. $U = -\alpha/r$ という場において $E=0$ で（放物線にそって）運動する質点の座標の

時間に対する関係を求めよ.

解　積分

$$t=\int\frac{rdr}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m}r-\frac{M^2}{m^2}}}$$

に

$$r=\frac{M^2}{2m\alpha}(1+\eta^2)=\frac{p}{2}(1+\eta^2)$$

を代入すると, 結局, 求める関係はつぎのようなパラメター表示で得られる.

$$r=\frac{p}{2}(1+\eta^2),\qquad t=\sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}}\frac{\eta}{2}\left(1+\frac{\eta^2}{3}\right),$$

$$x=\frac{p}{2}(1-\eta^2),\qquad y=p\eta.$$

パラメター η の値は $-\infty$ から $+\infty$ まで変わる.

2.　中心力の場 $U=-\alpha/r^2$ $(\alpha>0)$ における質点の運動方程式を積分せよ.

解　公式 (14.6), (14.7) により, また φ および t の座標原点を適当にえらんでつぎの結果を得る.

a)　$E>0,\quad \frac{M^2}{2m}>\alpha$ のとき　$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2mE}{M^2-2m\alpha}}\cos\left[\varphi\sqrt{1-\frac{2m\alpha}{M^2}}\right],$

b)　$E>0,\quad \frac{M^2}{2m}<\alpha$ のとき　$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2mE}{2m\alpha-M^2}}\sinh\left[\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2}-1}\right],$

c)　$E<0,\quad \frac{M^2}{2m}<\alpha$ のとき　$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2m|E|}{2m\alpha-M^2}}\cosh\left[\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2}-1}\right].$

3つの場合すべてについて

$$t=\frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{Er^2-\frac{M^2}{2m}+\alpha}.$$

b) と c) の場合, 粒子は, $\varphi\to\infty$ とともに座標原点に近づくような軌跡にそって中心に《衝突》する. 与えられた距離 r からの衝突は

$$\frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\left\{\sqrt{\alpha-\frac{M^2}{2m}+Er^2}-\sqrt{\alpha-\frac{M^2}{m^2}}\right\}$$

だけの時間ののちにおこる.

3.　ポテンシャル・エネルギー $U=-\alpha/r$ に小さな追加項 $\delta U(r)$ を付け加えると, 有界な運動の軌跡は閉じることをやめ, 1回転ごとに軌道の近日点が小さな角 $\delta\varphi$ だけ位置を変える. $\delta\varphi$ を a) $\delta U=\beta/r^2$, b) $\delta U=\gamma/r^3$ の場合に決定せよ.

解　r を $r_{\min}$ から $r_{\max}$ まで, さらに $r_{\max}$ から $r_{\min}$ まで変化させるとき, 角 φ は公式 (14.10) で与えられた値だけ変化する. この式をつぎの形に表わす (積分の見かけ上の発散をさけるため):

$$\Delta\varphi = -2\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}}dr.$$

$U=-\alpha/r+\delta U$ とおいて被積分関数を δU のベキで展開すると，第0次の項は 2π を与え，1次の項は求めている変位 $\delta\varphi$ を与える：

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{2m\delta U\cdot dr}{\sqrt{2m\left(E+\dfrac{\alpha}{r}\right)-\dfrac{M^2}{r^2}}} = \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{2m}{M}\int_0^{\pi}r^2\delta U\,d\varphi\right). \qquad (1)$$

ここで dr についての積分を，《摂動をうけていない》運動の軌跡にそっての $d\varphi$ の積分に変数変換した.

a) の場合 (1) の積分はただちに

$$\delta\varphi = -\frac{2\pi\beta m}{M^2} = -\frac{2\pi\beta}{\alpha p}$$

を与える (p は (15.4) で与えられている摂動をうけていない楕円の通径).

b) の場合　$r^2\delta U=\gamma/r$ で，$1/r$ に (15.5) を代入して

$$\delta\varphi = -\frac{6\pi\alpha\gamma m^2}{M^4} = -\frac{6\pi\gamma}{\alpha p^2}$$

を得る.

第4章　粒子の衝突

§ 16.　粒子の崩壊

多くの場合に，いろいろの力学的過程の性質についての重要な結論が，運動量とエネルギーの保存法則だけから導かれる．この場合，これらの性質が，過程に加わっている粒子間の相互作用の具体的な種類にはまったく関係しないということが本質的である．

まず粒子が《自然に》(すなわち，外場の介入なしに)，2つの《構成部分》，すなわち，崩壊ののち，互いに相互作用することなく運動する2つの粒子へと分かれる過程から始めよう．

この過程は，粒子が静止している（崩壊のときまで）基準系で考えるのがもっとも簡単である．運動量の保存法則によって，崩壊によってできた2つの粒子の運動量の和はゼロである．すなわち，粒子は，大きさが同じで反対向きの運動量で，離れてゆく．その共通の絶対値（p_0 と書く）はつぎのエネルギーの保存法則から決定される：

$$E_{内部} = E_{1内部} + \frac{p_0{}^2}{2m_1} + E_{2内部} + \frac{p_0{}^2}{2m_2}.$$

ここで，m_1, m_2 は崩壊によってできた粒子の質量，$E_{1内部}, E_{2内部}$ はその内部エネルギーであり，$E_{内部}$ は最初の（崩壊してゆく）粒子の内部エネルギーである．《崩壊エネルギー》を ε と書こう．すなわち

$$\varepsilon = E_{内部} - E_{1内部} - E_{2内部} \tag{16.1}$$

（もちろん，崩壊がとにかく可能であるためには，この値は正でなければならない）．そうすると，

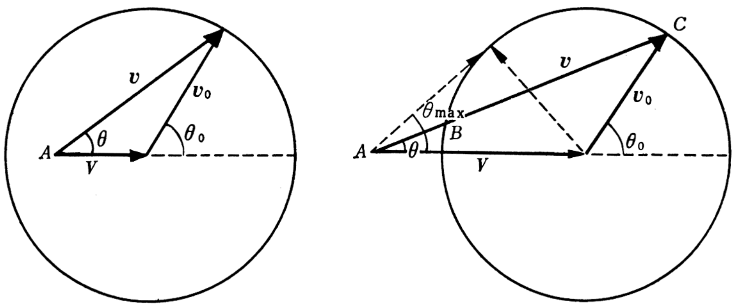
$$\varepsilon = \frac{p_0^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{p_0^2}{2m}. \tag{16.2}$$

この式から p_0 が決定される（m は2つの粒子の換算質量）．各粒子の速度は $v_{10} = p_0/m_1$，$v_{20} = p_0/m_2$ である．

崩壊する前の粒子が速さ V で運動している基準系に移ろう．この基準系は普通，実験室系（またはL系）とよばれ，これに対して全運動量がゼロであるような系は《慣性中心系》（または C 系）とよばれる．崩壊でできた粒子の1つを考え，その速度をL系，C系でそれぞれ $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_0$ とする．自明な式 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}_0$，あるいは $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}_0$ から

$$v^2 + V^2 - 2vV\cos\theta = v_0^2. \tag{16.3}$$

ここでθは速度 $\boldsymbol{V}$の方向からはかった崩壊粒子の飛んでゆく方向の角度である．この等式は，L系における崩壊粒子の飛行方向によって速さがどう変化するかを



a）$V<v_0$　　図 14　　b）$V>v_0$

きめる．これを図14に示したようなダイアグラムをつかって図式的に表わすことができる．半径 v_0 の円の中心から距離 V だけへだたった点 A から，その円周上の任意の点[1]にむかってひかれたベクトルが，速度 $\boldsymbol{v}$ を与えている．$V<v_0, V>v_0$ のおのおのの場合に対応して図14a, b が与えられる．$V<v_0$ の場合，粒子は任意の角度 θ の方向へ飛ぶことができる．$V>v_0$ の場合には，粒子は前方へだけ飛ぶことができる．θ がこえることのできない値 $\theta_{\max}$ は等式

$$\sin\theta_{\max} = \frac{v_0}{V} \tag{16.4}$$

で与えられる（これは点Aから円周への接線の方向である）．

L系とC系とにおける飛行の角度θ と θ_0 のあいだの関係は，同じ図から公式

$$\tan\theta = \frac{v_0\sin\theta_0}{v_0\cos\theta_0 + V} \tag{16.5}$$

によって与えられる．この式を $\cos\theta_0$ について解くと，初等的な変形ののち，つ

1）より正確にいえば，図14の円周を，直径を含む断面とするような半径 v_0 の球面上の任意の点．

ぎの式を得る；

$$\cos\theta_0 = -\frac{V}{v_0}\sin^2\theta \pm \cos\theta\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}. \tag{16.6}$$

$v_0 > V$ のときには，θ_0 と θ との関係は図 14 a から明らかなように一意的である．この場合，公式（16.6）においては根号の前の符号は $+$ をとらなければならない（$\theta=0$ のときに $\theta_0=0$ であるために）．$v_0 < V$ のときには，θ_0 と θ との関係は一意的ではない：θ の各値に対して，円の中心から点 B および C へひいたベクトル $\boldsymbol{v}_0$（図14b）に相当した 2 つの θ_0 の値が対応する．（16.6）式の根号の前の 2 つの符号がそれらに対応している．

物理学の実際問題としては，通常，1 つでなく多くの同じ粒子の崩壊が扱われる．これに関連して崩壊粒子の方向分布，エネルギー分布などが問題となる．この場合，われわれは，はじめの粒子の空間内の方向が無秩序的である，すなわち等方的であると仮定する．

C 系にあってはこの問題に対する答えはわかりきっている：すべての崩壊粒子（同種類の）は同じエネルギーをもち，一方，その飛行方向についての分布は等方的である．あとのほうに述べたことは，はじめの粒子の方向が無秩序的であるとした仮定に結びついている．そしてそれは，立体角の要素 do_0 の方向へ飛んでゆく粒子の数の比率がその要素の大きさに比例すること，すなわち $\frac{do_0}{4\pi}$ に等しいことを意味している．したがって，角度 θ_0 についての分布は，$do_0 = 2\pi\sin\theta_0 \times d\theta_0$ を代入して，

$$\frac{1}{2}\sin\theta_0\, d\theta_0. \tag{16.7}$$

L 系での分布はこの表式の変換によって得られる．たとえば L 系の運動エネルギーについての分布を求めよう．等式 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{V}$ を 2 乗して

$$v^2 = v_0^2 + V^2 + 2v_0 V\cos\theta_0.$$

したがって

$$d\cos\theta_0 = \frac{d(v^2)}{2v_0V}.$$

ここで運動エネルギー $T = mv^2/2$（ここで m は，われわれがどちらの崩壊粒子に着目しているかにしたがって，m_1 または m_2 である）を導入して（16.7）に代入することにより，求める分布を得る：

$$\frac{dT}{2mv_0V}. \tag{16.8}$$

運動エネルギーは, 最小値 $T_{\min}=\frac{m}{2}(v_0-V)^2$ から最大値 $T_{\max}=\frac{m}{2}(v_0+V)^2$ にいたるまでの値をとることができる. この範囲内で, 粒子は (16.8) にしたがって一様に分布する.

2つ以上の部分へ崩壊する場合には, 運動量とエネルギーの保存法則は崩壊粒子の速さと方向について, 当然多くの自由度を残す（2つの部分への崩壊のときよりも). とくに粒子の飛び散ってゆくエネルギーは, C 系においてもけっして1つのきまった値をとらない. しかし, 崩壊粒子の各部分がもち去る運動エネルギーの上限は存在する.

この上限の値をきめるために, 問題にしている1つの粒子（質量 m_1 とする）をのぞく崩壊粒子の全体を1つの系のように見なすことにして, その《内部》エネルギーを $E'_{内部}$ で表わす. そのとき粒子 m_1 の運動エネルギーは(16.1), (16.2) にしたがって

$$T_{10}=\frac{p_0^2}{2m_1}=\frac{M-m_1}{M}(E_{内部}-E_{1内部}-E'_{内部})$$

(M ははじめの粒子の質量). $E'_{内部}$ が最小のときに T_{10} が最大の値をとることが明らかである. そのためには, 質点 m_1 をのぞくすべての崩壊粒子が同一の速さで運動することが必要である. そのとき $E'_{内部}$ は単にそれらの内部エネルギーの和に帰し, 差 ($E_{内部}-E_{1内部}-E'_{内部}$) は崩壊エネルギー ε になる. かくして

$$(T_{10})_{\max}=\frac{M-m_1}{M}\varepsilon. \tag{16.9}$$

問　題

1. 2個の粒子へ崩壊するときの, 崩壊粒子の L 系での飛行方向 θ_1 と θ_2 とのあいだの関係を求めよ.

解 C 系では両方の粒子の飛行角は $\theta_{10}=\pi-\theta_{20}$ という関係にある. θ_{10} を単に θ_0 と書き, 2粒子のおのおのに対して式 (16.5) を用いて,

$$V+v_{10}\cos\theta_0=v_{10}\sin\theta_0\cot\theta_1,$$

$$V-v_{20}\cos\theta_0=v_{20}\sin\theta_0\cot\theta_2.$$

これらの2つの等式から θ_0 を消去しなければならない. このためにまず, これらから $\cos\theta_0$ および $\sin\theta_0$ をきめ, そののち和 $\cos^2\theta_0+\sin^2\theta_0=1$ をつくる. $v_{10}/v_{20}=m_2/m_1$ を考えに入れ, (16.2) をもちい, 結局つぎの式を得る.

$$\frac{m_2}{m_1}\sin^2\theta_2+\frac{m_1}{m_2}\sin^2\theta_1-2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\theta_1+\theta_2)=\frac{2\varepsilon}{(m_1+m_2)V^2}\sin^2(\theta_1+\theta_2).$$

2.　崩壊粒子のL系における飛行方向の分布を求めよ．

解　$v_0>V$ のときは，(16.6) で正の根号をとったものを (16.7) に代入すると，求める分布はつぎの形で得られる：

$$\frac{\sin\theta\,d\theta}{2}\left[2\frac{V}{v_0}\cos\theta+\frac{1+\frac{V^2}{v_0^2}\cos 2\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}}\right]\qquad(0\leqq\theta\leqq\pi).$$

$v_0<V$ のときには，θ_0 と θ との関係の2つの可能性を考慮しなければならない．θ が増大すると，それに対応するθ_0のうちの一方が増大し，他方が減少するから，(16.6)の根号の前の2つの符号に対応する，$d\cos\theta_0$ の2つの表式の差（和ではなく）をとらなければならない．結局，

$$\sin\theta\,d\theta\frac{1+\frac{V^2}{v_0^2}\cos 2\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}}\qquad(0\leqq\theta\leqq\theta_{\max}).$$

3.　2つの崩壊粒子のあいだの角度（L系での）の，とりうる値の範囲をきめよ．

解　角度θは式 (16.5) できめられる角度の和 $\theta_1+\theta_2$ である（問題1を見よ）．この角度の正接は容易に計算される．得られた表式の極値をしらべることによって，θ のとりうる値の区間についてつぎのような結果を得る．それは V および v_{10}, v_{20} の相対的な大きさ（$v_{20}>v_{10}$ を仮定する）に依存し，

$$v_{10}<V<v_{20}\quad\text{ならば}\quad 0<\theta<\pi,$$
$$V<v_{10}\quad\text{ならば}\quad \pi-\theta_m<\theta<\pi,$$
$$V>v_{20}\quad\text{ならば}\quad 0<\theta<\theta_m$$

である．ここでθ_mは

$$\sin\theta_m=\frac{V(v_{10}+v_{20})}{V^2+v_{10}v_{20}}$$

で与えられる．

§ 17.　粒子の弾性衝突

衝突が粒子の内部状態の変化をともなわないならば，その衝突は弾性的であるとよばれる．したがって，このような衝突に対しては，エネルギー保存法則を適用する際に粒子の内部エネルギーを考慮に入れる必要がない．

衝突を記述するには，両方の粒子の慣性中心が静止している基準系（C系）をもちいるのがもっとも簡単である．以下の節では，この系での諸量には0という

添字をつけて区別することにしよう．C系における衝突前の粒子の速度は，実験室系における速度$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$とつぎのような関係にある：

$$\boldsymbol{v}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v}_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}.$$

ここで $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ ((13.2) を見よ).

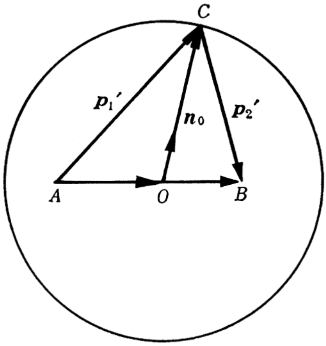
運動量の保存法則によって，衝突後の両粒子の運動量もまた互いに大きさが等しく逆向きの方向をもつことになり，一方エネルギーの保存法則によって，それらの絶対値の大きさは衝突前後で変化しない．このように，C系で見ると，衝突の結果2つの粒子の速度の方向は変化するが，それらの大きさは変わらず，また互いに逆向きであることも衝突前と変わらない．衝突後の粒子m_1の速度の方向の単位ベクトルを$\boldsymbol{n}_0$で表わすと，衝突後の両方の粒子の速度は（それをダッシュで表わす）

$$\boldsymbol{v}'_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}v\boldsymbol{n}_0, \qquad \boldsymbol{v}'_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}v\boldsymbol{n}_0. \tag{17.1}$$

実験室系へもどすためには，上の表式に慣性中心の速度 $\boldsymbol{V}$ を加えなければならない．このようにして，実験室系での衝突後の速度は

$$\boldsymbol{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}v\boldsymbol{n}_0 + \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2},$$
$$\boldsymbol{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}v\boldsymbol{n}_0 + \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}. \tag{17.2}$$

衝突について運動量およびエネルギーの保存法則から得られる知識は以上で全部である．ベクトル $\boldsymbol{n}_0$ の方向はというと，それは粒子の相互作用の法則，および衝突時における粒子の相互位置に依存するのである．



$$\overrightarrow{OC} = m\boldsymbol{v}$$
$$\overrightarrow{AO} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)$$
$$\overrightarrow{OB} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)$$

図 15

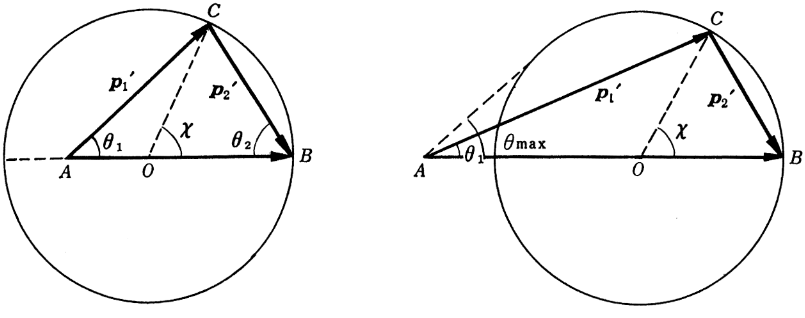
得られた結果を幾何学的に解釈することができる．このためには速度を運動量に書きかえておくのがよい．等式 (17.2) にそれぞれm_1, m_2をかけて，

$$\boldsymbol{p}'_1 = mv\boldsymbol{n}_0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2),$$

$$\boldsymbol{p}_2' = -mv\boldsymbol{n}_0 + \frac{m_2}{m_1+m_2}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2) \qquad (17.3)$$

($m = m_1m_2/(m_1+m_2)$――換算質量)を得る．半径 mv の円周をえがき，図15に示したように作図をする．単位ベクトル $\boldsymbol{n}_0$ が $\overrightarrow{OC}$ の向きをむいているとすると，$\overrightarrow{AC}$ および $\overrightarrow{CB}$ はそれぞれ $\boldsymbol{p}_1'$ および $\boldsymbol{p}_2'$ を与える．与えられた $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ に対しては，円周の半径および点 A, B の位置は変化しないが，点 C は円周上の任意の位置をとりうる．

粒子の一方(その質量を m_2 とする)が静止している場合をすこしくわしくしらべてみよう．この場合，OB の長さ $= \frac{m_2}{m_1+m_2}p_1 = mv$ は半径に一致している．すなわち点 B は円周上にある．またベクトル AB は第1の粒子の衝突前の運動量 $\boldsymbol{p}_1$ に一致する．このとき点 A は $m_1 < m_2$ ならば円の内側に，$m_1 > m_2$ ならば円の外側に位置する．それぞれに対応するダイヤグラムは図16にかかげた．図上 θ_1, θ_2 で示した角は，入射方向($\boldsymbol{p}_1$ の方向)からはかった衝突後のふれの角度を



$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{p}_1$; $AO/OB = m_1/m_2$

a) $m_1 < m_2$ 図 16 b) $m_1 > m_2$

表わす．図の上で χ で示した中心角($\boldsymbol{n}_0$ の方向を与える)は C 系での第1の粒子の方向転換の角度を表わしている．図からわかるように，角度 θ_1 および θ_2 は，角度 χ をつかってつぎのように表わされる：

$$\tan\theta_1 = \frac{m_2\sin\chi}{m_1+m_2\cos\chi}, \qquad \theta_2 = \frac{\pi-\chi}{2}. \qquad (17.4)$$

さらに衝突後の両方の速度の大きさをきめる公式を角度 χ をもちいて書き表わしておこう：

$$v_1' = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\chi}}{m_1 + m_2} v, \qquad v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \sin\frac{\chi}{2}. \tag{17.5}$$

和 $\theta_1 + \theta_2$ は衝突後の粒子の飛行方向のなす角度である．$m_1 < m_2$ ならば $\theta_1 + \theta_2 > \pi/2$, $m_1 > m_2$ ならば $\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$ となることは明らかである．

両方の粒子が衝突後も衝突前と同じ直線上を運動する場合（《正面衝突》）は，$\chi = \pi$ に相当する．すなわち，点 C の位置は直径上，点 A の左側（図16a；このときは $\boldsymbol{p}_1'$ と $\boldsymbol{p}_2'$ と互いに反対向き）か，あるいは A と O とのあいだ（図16b；この場合には $\boldsymbol{p}_1'$ と $\boldsymbol{p}_2'$ とは同じ向き）にある．

衝突後の粒子の速度は，この場合

$$\boldsymbol{v}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v}_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v} \tag{17.6}$$

に等しい．このときの $\boldsymbol{v}_2'$ の値は可能な最大値である：衝突の結果，はじめ静止していた粒子が獲得できる最大のエネルギーは，したがって

$$E'_{2\max} = \frac{m_2 v_2'^2{}_{\max}}{2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1 \tag{17.7}$$

である．ここで $E_1 = \dfrac{m_1 v_1^2}{2}$ は，入射粒子がはじめにもっていたエネルギーである．

$m_1 < m_2$ のときには，衝突後の第1の粒子の速度は任意の方向をとりうる．$m_1 > m_2$ であるならば，飛んでゆく粒子のふれの角度はある限界の値をこえることができない．この最大値は，AC が円周に接するときの点 C の位置に対応する（図 16b）．明らかに $\sin\theta_{1\,\max} = OC/OA$, あるいは

$$\sin\theta_{1\,\max} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{17.8}$$

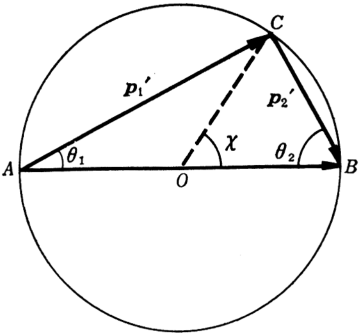


図 17

同一質量の粒子（一方が静止している）の衝突の場合はとくに簡単になる．この場合，点 B だけでなく，点 A も円周の上にくる（図17）．このとき

$$\theta_1 = \frac{\chi}{2}, \qquad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}, \tag{17.9}$$

$$v_1' = v\cos\frac{\chi}{2}, \qquad v_2' = v\sin\frac{\chi}{2}. \tag{17.10}$$

衝突後の粒子の飛行方向が直交していることに注意しよう.

問　題

運動している粒子（質量 m_1）が静止している粒子（質量 m_2）と衝突したのちの両方の粒子の速さを，L 系でのふれの角度で表わせ.

解　図16から $p_2' = 2\cdot OB\cdot\cos\theta_2$，あるいは $v_2' = 2v\frac{m}{m_2}\cos\theta_2$.

運動量 $p_1' = AC$ に対しては，

$$OC^2 = AO^2 + p_1'^2 - 2AO\cdot p_1'\cos\theta_1$$

あるいは

$$\left(\frac{v_1'}{v}\right)^2 - \frac{2m}{m_2}\frac{v_1'}{v}\cos\theta_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

という方程式がなりたつ. したがって

$$\frac{v_1'}{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\cos\theta_1 \pm \frac{1}{m_1 + m_2}\sqrt{m_2^2 - m_1^2\sin^2\theta_1}$$

（$m_1 > m_2$ のときは根号の前の２つの符号が可能，$m_2 > m_1$では ＋ だけ).

§ 18.　粒子の散乱

すでに前節で示したように，２粒子の衝突の結果を完全に決定（角 χ の決定）するためには，粒子の相互作用の具体的法則を取り入れた運動方程式を解くことが必要である.

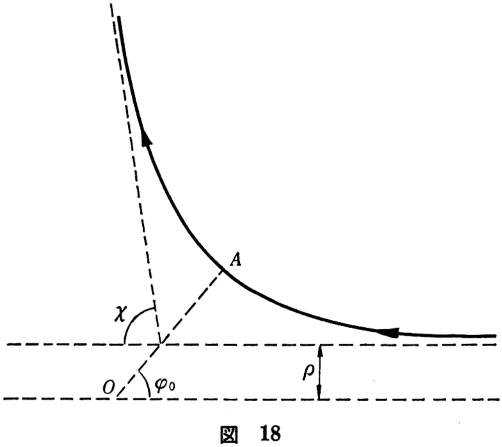


図　18

一般の方法にしたがって，まずそれに等価な,（２粒子系の慣性中心に位置する）固定点を中心とする力の場 $U(r)$ による質量mの１個の粒子のふれの問題をしらべる.

§14 で示したように，中心力の場における粒子の軌跡は，中心と軌道がそれに

もっとも近づいた点とを結ぶ直線（図18の OA）に関して対称である．したがって，軌道の２つの漸近線はこの直線と同じ角度でまじわる．この角度を φ_0 で表わすと，粒子が中心をそれて飛んでゆく際の軌道のふれの角度 χ は，図からわかるように

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0| \tag{18.1}$$

である．角度 φ_0 は（14.7）によって，粒子が中心にもっとも近づいた点と無限に離れた位置とのあいだでとった積分

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E-U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} \tag{18.2}$$

によってきめられる．$r_{\min}$ は，根号内の表式の根であることを思い出そう．

われわれがここで扱っているような有界でない運動では，定数 E および M の代わりに，無限遠での粒子の速度 v_∞ といわゆる**衝突パラメター** ρ とを導入するのが便利である．後者は，中心から v_∞ の方向へおろした垂線の長さ，すなわち，力の場がないとして粒子が通りぬけるときの中心からの距離である（図18）．エネルギーと角運動量とは，これらの量によって，つぎのように表わされる：

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2}, \qquad M = m\rho v_\infty. \tag{18.3}$$

一方，式（18.2）は

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2}}} \tag{18.4}$$

と書きかえられる．これは（18.1）とともに χ の ρ に対する関係を与える．

物理学の実際問題としては，普通，粒子の個々のふれを問題にすることはなく，散乱中心にむかって同一速度 $\boldsymbol{v}_\infty$ で衝突してくる同一粒子の束全体の，いわば**散乱**を問題にする．ビームのなかの，ことなる衝突パラメターをもった各粒子は，ことなる角度 χ で散乱される．単位時間のうちに，χ と $\chi + d\chi$ のあいだの角度に散乱される粒子の数を dN と書こう．この数自体は，入射してくる束の密度に依存する（比例する）ので，散乱過程を特徴づけるのには不適当である．このため，比

$$d\sigma = \frac{dN}{n} \tag{18.5}$$

を導入する．ここでnは，単位時間に束の横断面の単位面積を通過する粒子の数である（われわれは，束がその全断面にそって一様であることを当然仮定している）．この比は面積の次元をもっており，**有効散乱断面積**とよばれる．これは散乱する場の形によって完全に決定され，また散乱過程のもっとも重要な特徴づけを与える．

χとρとの関係が，互いに一意的であると考えよう．それには，たとえば散乱角が衝突パラメターの単調減少関数であればよい．このような場合，与えられた角度の区間χと$\chi + d\chi$のあいだに散乱されるのは，一定の区間$\rho(\chi)$と$\rho(\chi) + d\rho(\chi)$のあいだの衝突パラメターをもつ粒子だけである．このような粒子の数は，半径がρの円と$\rho + d\rho$の円とのあいだに囲まれた円環の面積にnを乗じたもの，すなわち$dN = 2\pi\rho d\rho\cdot n$に等しい．したがって有効断面積は

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho. \tag{18.6}$$

有効断面積の散乱角に対する依存性を求めるためには，この表式をつぎの形に書きなおすだけで十分である：

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|d\chi. \tag{18.7}$$

ここで導関数$d\rho/d\chi$が負でありうることを考えに入れて（それはしばしばおこる），$d\rho/d\chi$に絶対値符号をつけておいた[1]．しばしば，$d\sigma$は平面角の要素$d\chi$にではなく，立体角の要素doに関係づけられる．頂角χと$\chi + d\chi$の円錐のかこむ立体角は$do = 2\pi\sin\chi d\chi$である．したがって（18.7）から

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|do. \tag{18.8}$$

動かない力の中心による粒子束の散乱の問題から，はじめ静止していた他の粒子による粒子束の散乱という実際問題に移れば，式（18.7）は有効断面積の慣性中心系での角度に対する関係をきめる．実験室系での角度θに対する有効断面積の関係を求めるには，この式のなかのχを式（17.4）によってθで表わさなければならない．このとき，入射粒子束の散乱断面積の表現（χをθ_1で表わす）と同様，はじめ静止していた粒子に対する表式（χをθ_2で表わす）も得られる．

1） 関数$\rho(\chi)$が多価関数であれば，この関数のすべての分枝にわたって，この表現の和をとらなければならないことは明らかである．

問　題

1. 半径aの絶対剛体球（すなわち相互作用が$r<a$で$U=\infty, r>a$で$U=0$にしたがう）による粒子の散乱断面積を決定せよ．

解　球の外では粒子は自由に運動し，一方その内側では運動がそもそもおこりえないのであるから，軌跡は2つの直線からなりたち，その2つの直線は軌跡が球にふれる点を通る直径に対して対称である（図19）．図からわかるとおり，

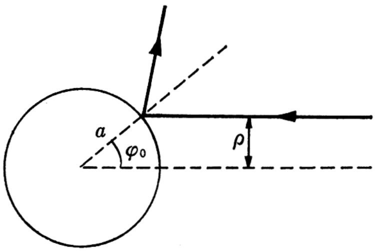


図 19

$$\rho = a\sin\varphi_0 = a\sin\frac{\pi-\chi}{2} = a\cos\frac{\chi}{2}.$$

(18.7) または (18.8) に代入して，

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{2}\sin\chi\,d\chi = \frac{a^2}{4}do \tag{1}$$

を得る．すなわちC系では散乱は等方的である．$d\sigma$をすべての角度にわたって積分して，全断面積$\sigma=\pi a^2$が求められる．これは，粒子がともかく散乱されるためにそこを通らなければならない面積《**衝突面積**》は，球の断面積であるということに対応している．

L系へ移るためには，(17.4) にしたがってχをθ_1で表わさなければならない．計算は，§16の問題2でおこなったのとまったく同じ方法である（式 (17.4) と (16.5) との形式的類似のおかげで）．$m_1<m_2$（m_1は粒子の質量，m_2は球の質量）のときには，

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{4}\left[2\frac{m_1}{m_2}\cos\theta_1 + \frac{1+\dfrac{m_1^2}{m_2^2}\cos 2\theta_1}{\sqrt{1-\dfrac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\theta_1}}\right]do_1$$

($do_1 = 2\pi\sin\theta_1 d\theta_1$) を得る．$m_1>m_2$のときには，

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{2}\frac{1+\dfrac{m_1^2}{m_2^2}\cos 2\theta_1}{\sqrt{1-\dfrac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\theta_1}}do_1.$$

$m_1=m_2$のときには

$$d\sigma_1 = a^2|\cos\theta_1|do_1.$$

これは直接 (1) に$\chi=2\theta_1$（(17.9) による）を代入することによっても得られる．

はじめに静止していた球に対しては，いつでも$\chi=\pi-2\theta_2$がなりたち，これを (1) に入れて

$$d\sigma_2 = a^2|\cos\theta_2|do_2$$

を得る．

2.　上と同じ場合，有効断面積を，散乱された粒子の失ったエネルギー ε の関数として表わせ．

解　質点 m_1 の失ったエネルギーは，質点 m_2 の得たエネルギーに一致する．(17.5) および (17.7) によって

$$\varepsilon = E_2' = \frac{2m_1^2m_2}{(m_1+m_2)^2}v_\infty^2\sin^2\frac{\chi}{2} = \varepsilon_{\max}\sin^2\frac{\chi}{2}.$$

したがって

$$d\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_{\max}\sin\chi\, d\chi.$$

問題1の式 (1) に代入して

$$d\sigma = \pi a^2\frac{d\varepsilon}{\varepsilon_{\max}}$$

を得る．散乱粒子の ε の値に関する分布は，ε のゼロから $\varepsilon_{\max}$ に至る区間内で一様であることがわかる．

3.　$U \backsim r^{-n}$ の場で散乱されるとき，有効断面積は，粒子の速度 v_∞ にどのように依存するか?

解　(10.3) によると，ポテンシャル・エネルギーが $k=-n$ 次の同次関数であるときには，相似な軌跡に対して $\rho \backsim v^{-2/n}$，あるいは

$$\rho = v_\infty^{-2/n}f(\chi)$$

(相似な軌跡に対して，ふれの角度 χ は同じである)．(18.6) に代入してつぎの式が求められる：

$$d\sigma \backsim v_\infty^{-4/n}do.$$

4.　$U=-\alpha/r^2$ の場の中心に粒子の《到達》する有効断面積を決定せよ．

解　条件 $2\alpha > m\rho^2v_\infty^2$ をみたす ((14.11) 参照) 粒子，すなわち，衝突パラメターが $\rho_{\max}=\sqrt{2\alpha/mv_\infty^2}$ をこえない粒子だけが中心に《到達》する．したがって求めている有効断面積は

$$\sigma = \pi\rho_{\max}^2 = \frac{2\pi\alpha}{mv_\infty^2}.$$

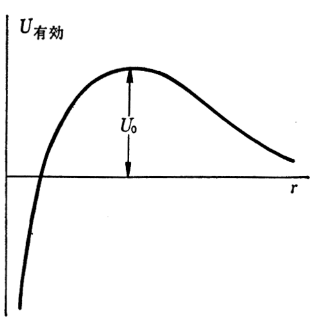


図　20

5.　$U=-\alpha/r^n\,(n>2, \alpha>0)$ の場合について同様の断面積を求めよ．

解　有効ポテンシャル・エネルギー

$$U_{有効} = \frac{m\rho^2v_\infty^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r^n}$$

の r に対する関係は図20に示したとおりであり，極大値

$$(U_{有効})_{\max} \equiv U_0 = \frac{(n-2)\alpha}{2}\left(\frac{m\rho^2 v_\infty^2}{\alpha n}\right)^{\frac{n}{n-2}}$$

をもっている．$U_0 < E$ である粒子だけが中心に《到達》する．$\rho_{\max}$ を条件 $U_0 = E$ から決定して

$$\sigma = \pi n(n-2)^{\frac{2-n}{n}}\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^{\frac{2}{n}}$$

が得られる．

6. ニュートンの法則にしたがって重力をおよぼしている球（質量 m_2，半径 R）の表面に粒子（質量 m_1）が到達する有効断面積を求めよ．

解 衝突の条件は不等式 $r_{\min} < R$ である．ここで $r_{\min}$ は粒子の軌跡のうちで球の中心にもっとも近い点の距離である．条件をみたす ρ のうちの最大の値は，条件 $r_{\min} = R$ によってきまり，それは方程式 $U_{有効}(R) = E$ の根に帰する．すなわち

$$\frac{m_1 v_\infty^2 \rho_{\max}^2}{2R^2} - \frac{\alpha}{R} = \frac{m_1 v_\infty^2}{2}.$$

ここで $\alpha = \gamma m_1 m_2$（γ は重力定数），また $m_2 \gg m_1$ である場合を考え $m \approx m_1$ とした．これから $\rho_{\max}^2$ を求め，

$$\sigma = \pi R^2\left(1 + \frac{2\gamma m_2}{Rv_\infty^2}\right)$$

を得る．$v_\infty \to \infty$ のとき有効断面積は，当然，球の幾何学的断面積に近づく．

7. 与えられた E のもとでの，有効断面積の散乱角に対する依存関係が与えられているとき，散乱の場 $U(r)$ の形を逆に推定せよ．ただし $U(r)$ は，r の単調減少関数（斥力の場）と仮定し，さらに $U(0) > E$，$U(\infty) = 0$ とする（オー・ベー・フィルソフ，1953）．

解 $d\sigma$ を散乱角について積分すると，公式

$$\int_\chi^\pi \frac{d\sigma}{d\chi} d\chi = \pi\rho^2 \qquad (1)$$

によって衝突パラメターの平方が与えられるから，関数 $\rho(\chi)$（および $\chi(\rho)$）もまた与えられていると考えてよい．

$$s = \frac{1}{r}, \qquad x = \frac{1}{\rho^2}, \qquad w = \sqrt{1 - \frac{U}{E}} \qquad (2)$$

と書くことにすると，式(18.2)，(18.2) は，つぎのように書きかえられる：

$$\frac{\pi - \chi(x)}{2} = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{xw^2 - s^2}}. \qquad (3)$$

ここで $s_0(x)$ は，方程式

$$xw^2(s_0) - s_0^2 = 0$$

の根である．

方程式 (3) は関数 $w(s)$ に対する積分方程式であり， §12 でもちいたのと類似の方法で解くことができる．(3) の両辺を $\sqrt{\alpha-x}$ で割り， dx についてゼロから α まで積分して，

$$\int_0^\alpha \frac{\pi-\chi(x)}{2}\frac{dx}{\sqrt{\alpha-x}}=\int_0^\alpha\int_0^{s_0(x)}\frac{ds\,dx}{\sqrt{(xw^2-s^2)(\alpha-x)}}$$
$$=\int_0^{s_0(\alpha)}\int_{x(s_0)}^\alpha\frac{dx\,ds}{\sqrt{(xw^2-s^2)(\alpha-x)}}=\pi\int_0^{s_0(\alpha)}\frac{ds}{w}$$

を得る．左辺を部分積分して，

$$\pi\sqrt{\alpha}-\int_0^\alpha\sqrt{\alpha-x}\frac{d\chi}{dx}\,dx=\pi\int_0^{s_0(\alpha)}\frac{ds}{w}$$

となる．この関係を α について微分し，そのあとで $s_0(\alpha)$ を単に s と書き，それに対応して α を s^2/w^2 とおきかえる．等式を微分の形で表わすと

$$\pi d\left(\frac{s}{w}\right)-\frac{1}{2}d\left(\frac{s^2}{w^2}\right)\int_0^{s^2/w^2}\frac{\chi'(x)dx}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2}-x}}=\frac{\pi}{w}ds,$$

あるいは，

$$-\pi d\ln w=d\left(\frac{s}{w}\right)\int_0^{s^2/w^2}\frac{\chi'(x)dx}{\sqrt{\frac{s^2}{w_2}-x}}.$$

この等式は直接積分される．その際，右辺の dx についての積分と $d(s/w)$ についての積分の順序は交換する．$s=0$ (すなわち $r\to\infty$) で $w=1$ (すなわち $U=0$) でなければならないことを考えに入れ，またはじめの変数 r と ρ にもどして， 結局つぎの結果を得る (2つの等価な形で)：

$$w=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{rw}^\infty \mathrm{Ar}\cosh\frac{\rho}{rw}\frac{d\chi}{d\rho}d\rho\right\}$$
$$=\exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int_{rw}^\infty\frac{\chi(\rho)d\rho}{\sqrt{\rho^2-r^2w^2}}\right\}. \qquad (4)$$

この式は，すべての $r>r_{\min}$，すなわち与えられたエネルギー E をもった散乱粒子が実際に運動しうる領域において，関数 $w(r)$ (および $U(r)$) の形を陰に決定している．

§ 19. ラザフォードの公式

上に得られた公式の重要な応用の1つは，クーロン場による荷電粒子の散乱である． (18.4) に $U=\alpha/r$ を入れ初等的な積分をおこなえば，

$$\varphi_0 = \text{arc cos}\frac{\dfrac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}\right)^2}}.$$

したがって

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\tan^2\varphi_0,$$

あるいは (18.1) によって $\varphi_0 = (\pi - \chi)/2$ をもちいると

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\cot^2\frac{\chi}{2}. \tag{19.1}$$

これを χ について微分し，(18.7) あるいは (18.8) に代入すると：

$$d\sigma = \pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{\cos\dfrac{\chi}{2}}{\sin^3\dfrac{\chi}{2}}d\chi, \tag{19.2}$$

あるいは

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2\frac{do}{\sin^4\dfrac{\chi}{2}}. \tag{19.3}$$

これは**ラザフォードの公式**とよばれる．有効断面積が α の符号によらないこと，したがって，得られた結果は斥力および引力のクーロン場に対して同様に適用されることに注意しよう．

式 (19.3) は，衝突しあう粒子の慣性中心が静止している基準系における有効断面積を与えるものである．実験室系への変換は公式 (17.4) をもちいておこなわれる．はじめ静止していた粒子に対しては，$\chi = \pi - 2\theta_2$ を (19.2) に代入して

$$d\sigma_2 = 2\pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{\sin\theta_2}{\cos^3\theta_2}d\theta_2 = \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{do_2}{\cos^3\theta_2}. \tag{19.4}$$

入射粒子に対しては，一般には変換の結果きわめて面倒な式になる．2つの特別の場合だけについて注目しよう．

散乱する粒子の質量 m_2 が散乱を受ける粒子の質量 m_1 にくらべて大きいときには，$\chi \approx \theta_1$，また $m \approx m_1$，したがって

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{4E_1}\right)^2\frac{do_1}{\sin^4\dfrac{\theta_1}{2}}. \tag{19.5}$$

ここで $E_1=m_1v_\infty^2/2$ は入射粒子のエネルギーである.

2つの粒子の質量が同じ ($m_1=m_2, m=m_1/2$) であるときには, (17.9) によって $\chi=2\theta_1$, これを (19.2) に代入して

$$d\sigma_1=2\pi\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2\frac{\cos\theta_1}{\sin^3\theta_1}d\theta_1=\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2\frac{\cos\theta_1}{\sin^4\theta_1}do_1 \tag{19.6}$$

が得られる. 2つの粒子の質量が同じだというだけでなく, 2つの粒子があらゆる点で同じであるならば, 散乱ののちに, はじめ運動していた粒子とはじめ静止していた粒子とを区別することは, 意味をもたない. 2つの粒子に対する総有効断面積は $d\sigma_1$ と $d\sigma_2$ とを加え合わせ, θ_1 および θ_2 とを共通の θ におきかえることによって得られる:

$$d\sigma=\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2\left(\frac{1}{\sin^4\theta}+\frac{1}{\cos^4\theta}\right)\cos\theta do. \tag{19.7}$$

ふたたび一般の公式 (19.2) にもどり, これをもちいて散乱粒子が衝突によって失ったエネルギーに対する分布をきめよう. 散乱をうける粒子の質量 (m_1) と散乱する粒子の質量 (m_2) とがどのような関係にあるときでも, 散乱によって獲得する速さはC系での角度によって, つぎのように表わされる:

$$v_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_\infty\sin\frac{\chi}{2}$$

((17.5) を見よ). したがって, 散乱する粒子の得るエネルギー, したがってまた質点 m_1 の失うエネルギーは,

$$\varepsilon=\frac{m_2}{2}v_2'^2=\frac{2m^2}{m_2}v_\infty^2\sin^2\frac{\chi}{2}$$

に等しい. これから $\sin\frac{\chi}{2}$ を ε によって表わし, (19.2) へ代入すれば

$$d\sigma=2\pi\frac{\alpha^2}{m_2v_\infty^2}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} \tag{19.8}$$

を得る. この式が, 提出された問題——有効断面積をエネルギー損失 ε (ゼロから $\varepsilon_{\max}=2m^2v_\infty^2/m_2$ までの値をとる) の関数として表わす——に対する答である.

問　題

1. $U=\alpha/r^2$ の場における散乱断面積を求めよ ($\alpha>0$).

解　ふれの角度は

$$\chi = \pi\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2\alpha}{m\rho^2 v_\infty^2}}}\right].$$

有効断面積は

$$d\sigma = \frac{2\pi^2\alpha}{mv_\infty^2}\frac{\pi-\chi}{\chi^2(2\pi-\chi)^2}\frac{do}{\sin\chi}$$

2. 半径 a,《深さ》U_0 の球状《ポテンシャル井戸》(すなわち $r>a$ で $U=0, r<a$ で $U=-U_0$ の場)による散乱断面積を見いだせ.

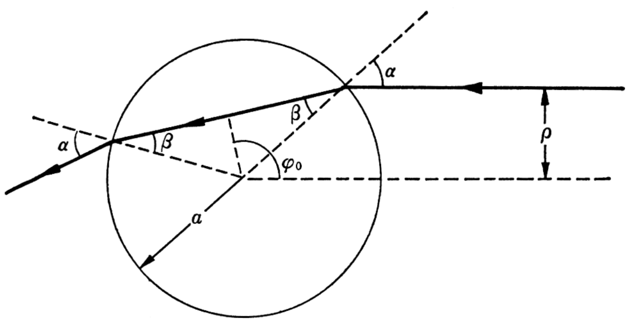


図 21

解 粒子の直線状の軌道はこの井戸に入るときおよび井戸からでるときに《屈折》する. § 7の問題によると, 入射角 α と屈折角 β (図21) とのあいだに,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n, \qquad n = \sqrt{1+\frac{2U_0}{mv_\infty^2}}$$

という関係がある. ふれの角は $\chi = 2(\alpha-\beta)$. したがって

$$\frac{\sin(\alpha-\chi/2)}{\sin\alpha} = \cos\frac{\chi}{2} - \cot\alpha\sin\frac{\chi}{2} = \frac{1}{n}.$$

この等式と, 図から明らかな関係

$$a\sin\alpha = \rho$$

とから α を消去して, ρ と χ とのつぎのような関係を得る:

$$\rho^2 = a^2\frac{n^2\sin^2\dfrac{\chi}{2}}{n^2+1-2n\cos\dfrac{\chi}{2}}.$$

この等式を微分して, 結局, 有効断面積

$$d\sigma = \frac{a^2n^2}{4\cos\dfrac{\chi}{2}}\frac{\left(n\cos\dfrac{\chi}{2}-1\right)\left(n-\cos\dfrac{\chi}{2}\right)}{\left(1+n^2-2n\cos\dfrac{\chi}{2}\right)^2}do$$

が求められる．角度χは，ゼロ（$\rho=0$ のとき）から，つぎの式できめられる $\chi_{\max}$（$\rho=a$ のとき）までのあいだを変化する：

$$\cos\frac{\chi_{\max}}{2}=\frac{1}{n}.$$

全有効面積は，円錐 $\chi<\chi_{\max}$ の内部のすべての角にわたって $d\sigma$ を積分することにより得られ，結局，幾何学的断面積 πa^2 に等しくなる．

§ 20.　微小角度での散乱

大きな衝突パラメターでおこる衝突については，有効断面積の計算はきわめて簡単である．そこでは場Uは小さくなり，したがって，ふれの角度は小さい．このとき計算は，慣性中心系によることなく，直接に実験室系でおこなうことができる．

散乱をうける粒子（質量 m_1）のはじめの運動量の方向を x 軸とし，散乱の平面を xy 平面とする．散乱後の粒子の運動量を $\boldsymbol{p}_1'$ で表わすと，自明な等式

$$\sin\theta_1=\frac{p_{1y}'}{p_1'}$$

がなりたつ．わずかのふれに対しては近似として，$\sin\theta_1$ を θ_1 で，分母の p_1' をはじめの運動量 $p_1=m_1v_\infty$ でおきかえる：

$$\theta_1\approx\frac{p_{1y}'}{m_1v_\infty}. \tag{20.1}$$

さらに $\dot{p}_y=F_y$ であるから，運動量の y 成分の全増し高は

$$p_{1y}'=\int_{-\infty}^{\infty}F_y dt. \tag{20.2}$$

ここで力は

$$F_y=-\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}=-\frac{dU}{dr}\frac{y}{r}.$$

積分（20.2）はすでに小さな量Uを含んでいるから，その計算にあたっては，同じ近似内で，粒子はそのはじめの道からまったくそれない，すなわち，まっすぐに（直線 $y=\rho$ にそって），そして一様に（速度 v_∞ で）運動すると考えることができる．したがって，（20.2）で

$$F_y=-\frac{dU}{dr}\frac{\rho}{r},\qquad dt=\frac{dx}{v_\infty}$$

と仮定し，

$$p'_{1y} = -\frac{\rho}{v_\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dU}{dr}\frac{dx}{r}$$

を得る．

つぎに dx についての積分を dr についての積分になおそう．まっすぐの道に対しては $r^2 = x^2 + \rho^2$ であるから，x が $-\infty$ から $+\infty$ まで変化するのに応じて，r は ∞ から ρ まで，そして ρ からふたたび ∞ へと変化する．dx についての積分は dr についての ρ から ∞ への積分の 2 倍になり，さらに dx は

$$dx = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$$

に変わる．

結局，散乱角（20.1）に対して，つぎのような表現が得られる[1]：

$$\theta_1 = -\frac{2\rho}{m_1 v_\infty^2}\int_\rho^\infty \frac{dU}{dr}\frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}. \qquad (20.3)$$

この式が曲がりが小さいときの ρ に対する θ_1 の関係を表わしている．散乱の有効断面積（L 系での）は（18.8）と同じ公式（χ の代わりに θ_1 とする）で求められるが，さらに $\sin\theta_1$ を θ_1 でおきかえて，

$$d\sigma = \left|\frac{d\rho}{d\theta_1}\right|\frac{\rho(\theta_1)}{\theta_1}do_1 \qquad (20.4)$$

となる．

問　題

1. 式（20.3）を（18.4）式から求めよ．

解　積分の見かけ上の発散をさけるために（18.4）式を

$$\varphi_0 = -\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{r_{\min}}^{R}\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2}}\,dr$$

の形に書く．積分の上限には，のちに $R \to \infty$ の極限へ移ることとして大きな有限の値 R をとっておく．U が小さいから平方根を U のべキで展開し，$r_{\min}$ を ρ で近似する：

$$\varphi_0 = \int_\rho^R \frac{\rho\,dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}} + \frac{\partial}{\partial\rho}\int_\rho^\infty \frac{U(r)dr}{mv_\infty^2\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}}.$$

1）もしここで説明した計算をすべて C 系でおこなえば，われわれは χ に対しても，m_1 の代わりに m をおきかえた同じ表現を得る．これは小さな角度 χ と θ_1 とが（17.4）にしたがって

$$\theta_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\chi$$

の関係をもつことからくる．

第1の積分は $R\to\infty$ の極限で $\dfrac{\pi}{2}$ になる．第2の積分は，まえもって部分積分で変形しておき，結局，つぎの表現を得る：

$$\chi=\pi-2\varphi_0=2\frac{\partial}{\partial\rho}\int_\rho^\infty\frac{\sqrt{r^2-\rho^2}}{mv_\infty^2}\frac{dU}{dr}dr\ =-\frac{2\rho}{mv_\infty^2}\int_\rho^\infty\frac{dU}{dr}\frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}}.$$

これは (20.3) 式に等しい．

2.　$U=\alpha/r^n$ $(n>0)$ の場による小角度の散乱の有効断面積を求めよ．

解　(20.3) により

$$\theta_1=\frac{2\rho\alpha n}{m_1v_\infty^2}\int_\rho^\infty\frac{dr}{r^{n+1}\sqrt{r^2-\rho^2}}.$$

$\rho^2/r^2=u$ とおきかえると，積分はオイラーの B 積分となり Γ 関数で表わされる；

$$\theta_1=\frac{2\alpha\sqrt{\pi}}{m_1v_\infty^2\rho^n}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

ここで ρ を θ_1 で表わし (20.4) に入れて

$$d\sigma=\frac{1}{n}\left[\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{\alpha}{m_1v_\infty^2}\right]^{\frac{2}{n}}\theta_1^{-2\left(1+\frac{1}{n}\right)}do_1$$

を得る．

第5章　微　小　振　動

§ 21.　1次元の自由振動

力学系のおこなう運動のなかでも非常に広く見られるタイプは，系が安定なつり合いの位置の近くでおこなう**微小振動**とよばれる運動である．この運動の考察の手初めに，まずもっとも簡単な場合，すなわち，ただ1つの自由度をもつ系をとりあげよう．

系の安定なつり合いは，ポテンシャル・エネルギー $U(q)$ が極小になる位置に対応する．系がその位置からずれると，系をもとへもどそうとする力 $-dU/dq$ が生ずる．つり合いの位置に相当する一般座標の値を q_0 で表わす．つり合いの位置からのずれが小さいときは，差 $U(q)-U(q_0)$ を $q-q_0$ のベキに展開して，最初のゼロでない項を残せば十分である．一般の場合，それは2次の項である：

$$U(q)-U(q_0)\cong\frac{k}{2}(q-q_0)^2.$$

ここで k は正の係数である（2階導関数 $U''(q)$ の $q=q_0$ での値）．今後ポテンシャル・エネルギーをその極小値からはかることにし（すなわち $U(q_0)=0$ とおく），つり合いの位置からの座標のずれを

$$x=q-q_0 \tag{21.1}$$

と書く．そうすると，

$$U(x)=\frac{kx^2}{2}. \tag{21.2}$$

自由度1の系の運動エネルギーは，一般に

$$\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2=\frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2$$

の形をもつ．いまの近似では，関数 $a(q)$ の値として $q=q_0$ における値をとれば十分である．簡単のため

$$a(q_0)=m$$

とおくと[1)]，1次元の微小振動をおこなう系[2)] のラグランジアンとして，結局つぎの表現が得られる：

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \tag{21.3}$$

これに対応する運動方程式は

$$m\ddot{x} + kx = 0, \tag{21.4}$$

あるいは

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{21.5}$$

となる．ここに

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{21.6}$$

という記号を導入した．線形微分方程式（21.5）の2つの独立な解は $\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ であるから，その一般解は

$$x = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t \tag{21.7}$$

である．この表式は

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) \tag{21.8}$$

の形に書くこともできる．$\cos(\omega t + \alpha) = \cos\omega t\cos\alpha - \sin\omega t\sin\alpha$ であるから，（21.7）とくらべて，任意定数 a および α と定数 c_1 および c_2 とのあいだに

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \qquad \tan\alpha = -\frac{c_2}{c_1} \tag{21.9}$$

という関係がある．

このように，安定なつり合いの位置の近くでは，系は調和振動をおこなう．（21.8）の周期的因数にかかる係数 a を振動の**振幅**，余弦関数の引数を振動の**位相**とよぶ．α は位相の初期値であって，いうまでもなく，時間の原点のとり方に依存する．ω という量は振動の**円振動数**とよばれる．しかし理論物理学では，それは簡単に**振動数**とよばれるのが普通であり，われわれも以下ではそれにしたがう．

振動数は，初期条件にはよらない振動の基本的な特性を表わす．（21.6）式によれば，それは力学系自体の性質だけによって完全にきまる．しかし，この振動数の性質は，振動が小さいという仮定に結びついているのであって，より高い近

1） x が粒子のデカルト座標であれば，量 m はただの質量になることを指摘しておこう．

2） そのような系はしばしば1次元の**振動子**とよばれる．

似にすすむとなりたたなくなることを忘れてはならない．数学的にいえば，上の性質は，ポテンシャル・エネルギーが座標の2乗に依存することに結びついているのである[1]．

微小振動をおこなっている系のエネルギーは，

$$E=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\omega^2x^2),$$

あるいは，(21.8) を代入して

$$E=\frac{1}{2}m\omega^2a^2 \tag{21.10}$$

である．これは振幅の2乗に比例する．

振動をしている系の座標の時間に対する依存関係は，複素的な表現の実部

$$x=\mathrm{Re}\{Ae^{i\omega t}\} \tag{21.11}$$

によって表わすのが便利なことが多い．ここにAは複素定数である．それを

$$A=ae^{i\alpha} \tag{21.12}$$

の形に書くと，(21.8) の表現にもどる．定数Aは**複素振幅**とよばれる． その絶対値は通常の振幅に一致し，偏角は位相の初期値に一致する．

数学的関係の演算において指数関数を使うことは，微分をしても形が変わらないという点で，三角関数を使うよりも便利である．その際，われわれはさしあたり線形の演算（和，定数係数をかけること，微分，積分）しかおこなわないので，一般に実部をとることを表わす記号ははぶいて，計算の最後の結果で実部をとることにすればよい．

問　題

1. 振動の振幅と初期位相とを座標および速度の初期値 x_0 および v_0 によって表わせ．

解

$$a=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}},\qquad \tan\alpha=-\frac{v_0}{\omega x_0}.$$

2. ことなったアイソトープ原子からなる2個の2原子分子の振動数 ω,ω' の比を求めよ．それぞれの原子の質量を m_1, m_2 および m_1', m_2' とする．

解 アイソトープ原子は同じように相互作用するから，$k=k'$．分子の運動エネルギーにおける係数 m の役を演ずるのは，その換算質量である．そこで，(21.6) にしたがって

---

1) したがって，$U(x)$ が $x=0$ でもっと高次の極小であるとき，すなわち $n>2$ として $U\propto x^n$ のときには，上のような性質はない（§ 11 の問題 2a を見よ）．

$$\frac{\omega'}{\omega}=\sqrt{\frac{m_1m_2(m_1'+m_2')}{m_1'm_2'(m_1+m_2)}}.$$

3.　ばねの一端に結びつけられ，ある直線上を運動することのできる質量 m の質点の振動数を求めよ．このばねの他端は，直線から距離 l の点 A に固定されている（図22）．ばねは，長さ l のとき力 F で引張られている．

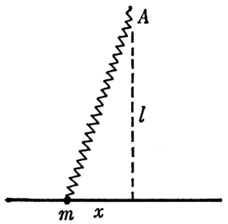


図　22

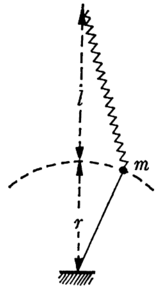


図　23

解　ばねのポテンシャル・エネルギーは（高次の微小量を省略して）力 F とばねの伸び δl との積に等しい．$x\ll l$ ならば

$$\delta l=\sqrt{l^2+x^2}-l\approx\frac{x^2}{2l}$$

であるから，$U=Fx^2/2l$．運動エネルギーは $m\dot{x}^2/2$ であるから，

$$\omega=\sqrt{\frac{F}{ml}}.$$

4.　同様の問題で，質点 m が半径 r の円周にそって動く場合（図23）．

解　この場合，ばねの伸びは（$\varphi\ll 1$ のとき）

$$\delta l=\sqrt{r^2+(l+r)^2-2r(l+r)\cos\varphi}-l\approx\frac{r(l+r)}{2l}\varphi^2.$$

運動エネルギーは $T=\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2$．これから，振動数は

$$\omega=\sqrt{\frac{F(r+l)}{rml}}.$$

5.　図2に示した振り子の振動数を求めよ．それをつるしてある点（質量 m_1 が付随している）は，水平方向に動くことができる．

解　$\varphi\ll 1$ ならば，§14 の問題3で得た公式から

$$T=\frac{m_1m_2l^2}{2(m_1+m_2)}\dot{\varphi}^2,\qquad U=\frac{m_2gl}{2}\varphi^2.$$

これから，

$$\omega = \sqrt{\frac{g(m_1 + m_2)}{m_1 l}}.$$

6.　曲線にそって（重力場のなかで）左右に往復する粒子の振動数がその振幅によらないようにその曲線を定めよ．

解　与えられた条件をみたす曲線は，つり合いの位置からはかった弧長を s として，粒子のポテンシャル・エネルギーが $U = ks^2/2$ となるようなものである．そのとき運動エネルギーは $T = m\dot{s}^2/2$ で（m は粒子の質量），その振動数は s の初期値に関係なく $\omega = \sqrt{k/m}$ である．

しかし，重力場のなかでは，鉛直方向の座標を y として $U = mgy$ である．したがって $ks^2/2 = mgy$ または

$$y = \frac{\omega^2}{2g}s^2$$

でなければならない．

他方，$ds^2 = dx^2 + dy^2$ であるから，

$$x = \int\sqrt{\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 - 1}\,dy = \int\sqrt{\frac{g}{2\omega^2 y} - 1}\,dy.$$

$$y = \frac{g}{4\omega^2}(1 - \cos\xi)$$

というおきかえをすれば，積分は容易におこなうことができて，

$$x = \frac{g}{4\omega^2}(\xi + \sin\xi)$$

が得られる．これら2つの式が，求める曲線をパラメター表示で与える．それはサイクロイドを表わしている．

§ 22.　強 制 振 動

変化する外場の作用をうける系の振動を考察することにしよう．そのような振動は，前節で考察したいわゆる**自由振動**と区別して**強制振動**とよばれる．これまでどおり振動は小さいと仮定されるから，外場は十分弱いものと了解する．もしそうでなければ，外場は過大な変位 x を生じさせるかもしれないから．

この場合，系は固有のポテンシャル・エネルギー $\frac{1}{2}kx^2$ のほかに，それに働く外場に結びついたポテンシャル・エネルギー $U_e(x, t)$ をもつ．この付加項を微小量 x のベキに展開して，

$$U_e(x, t) \cong U_e(0, t) + x\frac{\partial U_e}{\partial x}\bigg|_{x=0}$$

この第1項は，時間だけの関数であり，したがって，ラグランジアンからおとすことができる（他の時間の関数の t についての完全導関数とみなせるから）．第2項において，$-\partial U_e/\partial x$ はつり合いの位置で系に働く外からの《力》であって，時間の与えられた関数である．それを $F(t)$ で表わそう．こうして，ポテンシャル・エネルギーに $-xF(t)$ という項が加わり，系のラグランジアンは

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + xF(t) \tag{22.1}$$

となる．

これに対応する運動方程式は

$$m\ddot{x} + kx = F(t),$$

あるいは

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m}F(t) \tag{22.2}$$

である．ここでふたたび，自由振動の振動数 ω を導入した．

よく知られているように，定数係数の非同次線形微分方程式の一般解は，2つの部分の和 $x = x_0 + x_1$ の形に求められる．ただし，x_0 は同次方程式の一般解，x_1 は非同次方程式の特殊解である．いまの場合，x_0 は前節で考察した自由な振動を表わす．

とくに興味ある場合として，強制力もまた，ある振動数 γ をもつ時間の周期関数であると考えよう：

$$F(t) = f\cos(\gamma t + \beta). \tag{22.3}$$

方程式（22.2）の特殊解を，周期的な因数を含むような形 $x_1 = b\cos(\gamma t + \beta)$ においてみる．これを方程式に代入すると $b = f/m(\omega^2 - \gamma^2)$ が得られる．同次方程式の解を加えて，一般解

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}\cos(\gamma t + \beta) \tag{22.4}$$

を得る．任意定数 a および α は初期条件からきまる．

このように，周期的な強制力のもとで系のおこなう運動は，2つの振動から合成されている．すなわち，系の固有振動数 ω をもつものと，強制力の振動数 γ をもつものとである．

解（22.4）は，**共鳴**とよばれる場合，すなわち，強制力の振動数が系の固有振動数と一致する場合には適用できない．この場合の運動方程式の一般解を見いだ

すために，定数の記号を適当に改めて，(22.4) 式の形を

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}[\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)]$$

と書き改める．$\gamma\to\omega$ のとき第2項は不定形 0/0 を与える．それをロピタルの規則にしたがって有限の形になおすと，

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega}t\sin(\omega t + \beta) \tag{22.5}$$

を得る．したがって，共鳴の場合には，振幅が時間について線形に増大する（振動が小さく，これまで述べた理論が適用できるかぎりにおいて）．

なお，共鳴の近くの，すなわち，ε を微小量として $\gamma = \omega + \varepsilon$ であるような場合の微小振動がどうなるかをあきらかにしよう．一般解を

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{i(\omega+\varepsilon)t} = (A + Be^{i\varepsilon t})e^{i\omega t} \tag{22.6}$$

のように複素数の形に書く．$A + Be^{i\varepsilon t}$ という量は，因数 $e^{i\omega t}$ の周期 $2\pi/\omega$ のあいだにはすこししか変化しないから，共鳴の近くの運動は微小振動とみなすことができる．しかし，その振幅は変化する[1]．

この振幅を C と記せば，

$$C = |A + Be^{i\varepsilon t}|.$$

A および B をそれぞれ $ae^{i\alpha}$, $be^{i\beta}$ の形に書くと，

$$C^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\varepsilon t + \beta - \alpha). \tag{22.7}$$

したがって，振幅は2つの限界

$$|a - b| \leqslant C \leqslant a + b$$

のあいだを振動数 ε で振動する．この現象は**うなり**という名でよばれる．

運動方程式 (22.2) の解は，任意の強制力 $F(t)$ に対する一般的な形に求めることもできる．それを容易にするには，方程式をあらかじめ

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\omega x) - i\omega(\dot{x} + i\omega x) = \frac{1}{m}F(t),$$

あるいは

$$\frac{d\xi}{dt} - i\omega\xi = \frac{1}{m}F(t) \tag{22.8}$$

の形に書きなおしておけばよい．ここで複素量

$$\xi = \dot{x} + i\omega x \tag{22.9}$$

---

1) 振動の位相のなかの《定数》項も変化する．

を導入した．方程式（22.8）はもはや2階でなく，1階の方程式である．右辺がなければ，それの解は定数Aを含む $\xi = Ae^{i\omega t}$ となる． 一般的なやり方にしたがって，非同次方程式の解を $\xi = A(t)e^{i\omega t}$ の形におくと，関数 $A(t)$ に対してつぎの方程式を得る：

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{m}F(t)e^{-i\omega t}.$$

これを積分して，方程式（22.9）の解は

$$\xi = e^{i\omega t}\left\{\int_0^t \frac{1}{m}F(t)e^{-i\omega t}dt + \xi_0\right\} \qquad (22.10)$$

となる．ここで積分定数ξ_0は，$t=0$ におけるξの値に等しくとる． これで求める一般解が得られたことになる．関数 $x(t)$ は，表式（22.10）の虚数部分（を $i\omega$ で割ったもの）で与えられる[1]．

強制振動をおこなう系のエネルギーは，もちろん保存されない．系は，外力の源からエネルギーを得るのである．系のはじめのエネルギーをゼロと仮定して，力の働いている全期間のあいだに（$-\infty$ から $+\infty$ まで）系がうける全エネルギーを求めてみよう．（22.10）式によって（積分の下限を0の代わりに $-\infty$ とし，$\xi(-\infty)=0$ として），$t\to\infty$ に対して

$$|\xi(\infty)|^2 = \frac{1}{m^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t}\,dt\right|^2.$$

他方，系のエネルギーそのものは

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2x^2) = \frac{m}{2}|\xi|^2 \qquad (22.11)$$

である．これに $|\xi(\infty)|^2$ を代入して，求めるエネルギーのうけとり分

$$E = \frac{1}{2m}\left|\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t}\,dt\right|^2 \qquad (22.12)$$

が得られる：すなわち，力 $F(t)$ の，系の固有振動数に等しい振動数をもつフーリエ成分の絶対値の2乗によって与えられる．

とくに，外力がごく短い時間（$1/\omega$ にくらべて小さい）のあいだしか働かないときには，$e^{-i\omega t}\cong 1$ とおくことができる．すると，

$$E = \frac{1}{2m}\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt\right)^2.$$

1）その際，いうまでもなく，力 $F(t)$ は実数形に書いておかねばならない．

この結果はまえもって明白である．これは，短時間働く力は，その時間のあいだに系にいちじるしい変位を与えることなしに，運動量 $\int F\,dt$ を伝えるという事実にほかならない．

問　題

1. 力 $F(t)$ をうける系の強制振動を，$t=0$ では系はつり合いの位置に静止していた $(x=0, \dot{x}=0)$ という初期条件のもとで，つぎの場合について決定せよ：

a) $F=\mathrm{const}=F_0$.

解 $x=\dfrac{F_0}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)$；一定の力が働けば，つり合いの位置が変化する．そして新しいつり合いの位置のまわりに振動がおこなわれる．

b) $F=at$.

解 $x=\dfrac{a}{m\omega^3}(\omega t-\sin\omega t)$.

c) $F=F_0e^{-\alpha t}$.

解 $x=\dfrac{F_0}{m(\omega^2+\alpha^2)}\left(e^{-\alpha t}-\cos\omega t+\dfrac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right)$.

d) $F=F_0e^{-\alpha t}\cos\beta t$.

解
$$x=\frac{F_0}{m[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2]}\Big\{-(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\cos\omega t$$
$$+\frac{\alpha}{\omega}(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)\sin\omega t+e^{-\alpha t}[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\cos\beta t-2\alpha\beta\sin\beta t]\Big\}$$

（解を得るためには，力を複素数 $F=F_0e^{(-\alpha+i\beta)t}$ の形に書くのが便利である）．

2. $t<0$ に対して $F=0$, $0<t<T$ に対して $F=F_0t/T$, $t>T$ に対して $F=F_0$ という法則（図24）にしたがって外力が働いたのちに，系の振動がもつ最終的な振幅を求めよ．時刻 $t=0$ までは，系はつり合いの位置に静止している．

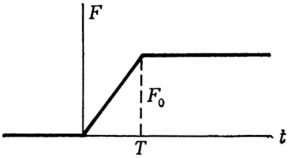


図 24

解 初期条件を満足する振動の，時間 $0<t<T$ における積分は

$$x=\frac{F_0}{mT\omega^3}(\omega t-\sin\omega t)$$

となる．$t>T$ に対しては，解の形を

$$x=c_1\cos\omega(t-T)+c_2\sin\omega(t-T)+\frac{F_0}{m\omega^2}$$

とおく，$t=T$ で x および $\dot{x}$ が連続という条件から，

$$c_1 = -\frac{F_0}{mT\omega^3}\sin\omega T, \qquad c_2 = \frac{F_0}{mT\omega^3}(1-\cos\omega T)$$

が得られる．このときの振幅は，

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{2F_0}{mT\omega^3}\sin\frac{\omega T}{2}$$

である．力 F_0 がゆっくり加わるほど（すなわち，T が大きいほど），この振幅は小さいということに注意しよう．

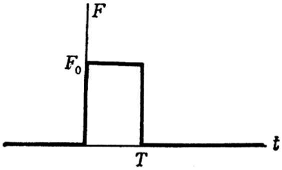


図 25

3. ある限られた時間 T のあいだだけ一定の力 F_0 が働くという場合に（図25），上と同様の問題を解け．

解 問題2と同様にして解けるが，公式（22.10）を利用するほうが簡単である．$t > T$ に対しては，$x=0$ という位置のまわりに自由振動がおこなわれる．これに対しては，

$$\xi = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}\int_0^T e^{-i\omega t}\,dt = \frac{F_0}{i\omega m}(1-e^{-i\omega T})e^{i\omega t}.$$

その絶対値を2乗すれば，公式 $|\xi|^2 = a^2\omega^2$ にしたがって振幅が得られる．結果は，

$$a = \frac{2F_0}{m\omega^2}\sin\frac{\omega T}{2}.$$

4. 時間0から T までのあいだ，$F = F_0 t/T$ にしたがって力が働く場合に（図26），上と同様の問題を解け．

解 同じやり方によって，

$$a = \frac{F_0}{Tm\omega^3}\sqrt{\omega^2T^2 - 2\omega T\sin\omega T + 2(1-\cos\omega T)}$$

が得られる．

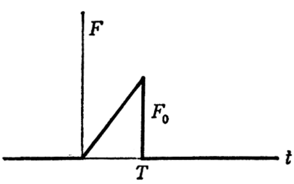


図 26

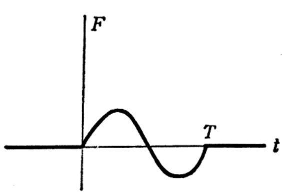


図 27

5. 同じ問題を，時間0から $T = 2\pi/\omega$ までのあいだ，$F = F_0\sin\omega t$ にしたがって変化する力の場合について解け（図27）．

解 （22.10）に

$$F(t) = F_0 \sin \omega t = \frac{F_0}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

を代入して，ゼロからTまで積分すると，

$$a = \frac{F_0 \pi}{m\omega^2}$$

が得られる．

§23. 多くの自由度をもつ系の振動

いくつか（s 個）の自由度をもつ系の自由振動の理論は，§21で1次元の振動を考察したのと同様のやり方でつくりあげることができる．

一般座標 q_i ($i = 1, 2, \cdots, s$) の関数である系のポテンシャル・エネルギーUは $q_i = q_{i0}$ で極小になるとする．小さな変位

$$x_i = q_i - q_{i0} \tag{23.1}$$

を導入し，これでUを2次の項まで展開すると，ポテンシャル・エネルギーが正確定の2次形式として得られる：

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,k} k_{ik}\, x_i\, x_k. \tag{23.2}$$

ただし，ポテンシャル・エネルギーはその極小値からはかることにする．(23.2)における係数 k_{ik} および k_{ki} は同一の量 $x_i x_k$ にかかっているから，それは添字に関してつねに対称であることが明らかである：

$$k_{ik} = k_{ki}.$$

運動エネルギーは，一般に

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q)\dot{q}_i \dot{q}_k$$

という形をもつが（(5.5) を見よ），この係数において $q_i = q_{i0}$ とおき，定数 $a_{ik}(q_0)$ を m_{ik} で表わすと，これは正確定の2次形式になる：

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k. \tag{23.3}$$

係数 m_{ik} も，添字について対称とみなすことができる：

$$m_{ik} = m_{ki}.$$

こうして，自由な微小振動をおこなう系のラグランジアンは，

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik}\dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k). \tag{23.4}$$

そこでつぎに運動方程式を求めよう．そこに現われる導関数を定めるために，ラグランジアンの完全微分を書く：

$$dL = \frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_i d\dot{x}_k + m_{ik}\dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik}x_i dx_k - k_{ik}x_k dx_i).$$

和の値は，いうまでもなく，和をとる添字の付け方にはよらないから，括弧内の第1項と第3項で i を k に，k を i に変える．そうして，係数 m_{ik}, k_{ik} の対称性に注意すると，

$$dL = \sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik}x_k dx_i)$$

が得られる．これから明らかに，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_k m_{ik}\dot{x}_k, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\sum_k k_{ik}x_k.$$

したがって，ラグランジュ方程式は

$$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k + \sum_k k_{ik}x_k = 0 \tag{23.5}$$

となる．これは定数係数をもつ s 個($i=1, 2, \cdots, s$) の線形同次微分方程式の組を表わす．

こういう方程式を解く一般的なやり方にしたがって，s 個の未知関数 $x_k(t)$を

$$x_k = A_k e^{i\omega t} \tag{23.6}$$

の形におく．ここに A_k は，いまのところ未定の定数である．(23.6) を (23.5) に代入し，全体を $e^{i\omega t}$ で約すると，定数 A_k がみたすべき1組の線形同次代数方程式

$$\sum_k(-\omega^2 m_{ik} + k_{ik})A_k = 0 \tag{23.7}$$

が得られる．

この連立方程式がゼロとことなる解をもつためには，それの行列式がゼロにならなければならない：

$$|k_{ik} - \omega^2 m_{ik}| = 0. \tag{23.8}$$

方程式 (23.8)——**特有方程式**とよばれる——は，ω^2 について s 次の方程式である．これは一般に，s 個のことなった実の正根 $\omega_\alpha^2, \alpha = 1, 2, \cdots, s$ をもつ（特別の場合には，それらのうちいくつかが，互いに一致することがある）．そうやって定められた ω_α は，系の**固有振動数**とよばれる．

方程式 (23.8) の根が実で正であることは，物理的な考察によってあらかじめ

明らかである．実際，ω に虚数部分があるとしたら，(23.6) の座標 x_k (そして速度 $\dot{x}_k$ も) の時間に依存する部分には，指数関数的に減少あるいは増大する因数が含まれることになる．しかし，いまの場合そのような因数が含まれることは，系の全エネルギー $E = U + T$ が時間とともにエネルギーの保存法則に反して変化するという結果に導くから，許されない．

同じことは純粋に数学的な方法によっても確認される．(23.7) に A_i^* をかけ，i について和をとると

$$\sum_{i,k}(-\omega^2 m_{ik} + k_{ik})A_i^* A_k = 0$$

となる．これから，

$$\omega^2 = \frac{\sum k_{ik} A_i^* A_k}{\sum m_{ik} A_i^* A_k}.$$

この表現の分子および分母の2次形式は，係数 k_{ik} および m_{ik} が実数で対称であるために，実数である．実際，

$$\left(\sum_{i,k} k_{ik} A_i^* A_k\right)^* = \sum_{i,k} k_{ik} A_i A_k^* = \sum_{i,k} k_{ki} A_i A_k^* = \sum_{i,k} k_{ik} A_k A_i^*.$$

それらはまた本質的に正であり[1]，したがって，ω^2 も正である．

振動数 ω_α が見いだされたなら，そのおのおのを方程式 (23.7) に代入することによって，それに対応する係数 A_k がきまる．特有方程式の根 ω_α がすべてことなっていれば，よく知られているように，係数 A_k は行列式 (23.8) の小行列式において ω をそれぞれの ω_α でおきかえたものに比例する．それらの小行列式を $\Delta_{k\alpha}$ で表わす．こうして，微分方程式の組 (23.5) の特殊解は

$$x_k = \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}$$

という形をもつ．ここに C_α は任意の (複素) 定数である．

一般解は，s 個の特殊解すべてを加え合わせたものによって与えられる．その実数部分をとって，

$$x_k = \mathrm{Re}\left\{\sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\right\} \equiv \sum_\alpha \Delta_{k\alpha} \Theta_\alpha \tag{23.9}$$

を得る．ここで

1) 実の値をとる変数に対して，係数 k_{ik} によってつくられる2次形式が正確定であることは，その定義(23.2)から明らかである．ところで，複素数 A_k をあからさまに $a_k + ib_k$ の形に書くと

$$\sum_{i,k} k_{ik} A_i^* A_k = \sum_{i,k} k_{ik}(a_i - ib_i)(a_k + ib_k) = \sum_{i,k} k_{ik} a_i a_k + \sum_{i,k} k_{ik} b_i b_k$$

となる (ふたたび k_{ik} の対称性のために)，すなわち，2つの正確定な形式の和となる．

$$\Theta_\alpha = \mathrm{Re}\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\} \tag{23.10}$$

という記号を導入した.

このようにして，系の各座標の時間的変動は，振幅と位相とは任意であるが，完全に定まった振動数をもつ s 個の単純な周期的振動 $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_s$ の重ね合わせであることがわかる.

一般座標を適当にえらぶことによって，そのおのおのがただ1つの単振動をおこなうようにすることはできないかという疑問が当然生ずるであろう．一般解 (23.9) の形そのものがこの問題を解く方法を示している.

実際，s 個の関係 (23.9) を s 個の未知量 Θ_α に関する方程式の組とみなすと，それを解いて，$\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_s$ を座標 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ で表わすことができる．したがって，Θ_α を新しい一般座標とみなすことができる．この座標を**基準座標**（または主座標)，それがおこなう単純な周期的振動を系の**基準振動**とよぶ.

基準座標 Θ_α はその定義から明らかなように，

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0 \tag{23.11}$$

という方程式をみたす．このことは，基準座標を使うと，運動方程式は s 個の互いに独立な方程式に分かれることを意味する．各基準座標の加速度は，その座標の値にのみ依存し，各座標の時間的変化のようすを完全に定めるには，それぞれ自身とそれに対応する速度との初期値だけを知れば十分である．いいかえると，系の基準振動は完全に独立である.

いま述べたところから明らかなように，ラグランジアンを基準座標によって表わすと，それぞれがいずれかの振動数 ω_α をもつ1次元の振動を表わすような項ばかりの和になる．すなわち，ラグランジアンの形は

$$L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}(\dot{\Theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha^2) \tag{23.12}$$

となる．ここに m_α は正の定数である．数学的な観点からいうと，変換 (23.9) は両方の2次形式——運動エネルギー(23.3)とポテンシャル・エネルギー(23.2)——を同時に対角化するということである.

基準座標は，ラグランジアンのなかの速度の2乗の項の係数が 1/2 に等しくなるようにえらぶのが普通である．それには，

$$Q_\alpha = \sqrt{m_\alpha}\Theta_\alpha \tag{23.13}$$

によって基準座標（それを Q_α と書く）をきめれば十分である．そうすると，

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}(\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2).$$

特有方程式の根のなかに重根がある場合には，上に述べたことは多少の変更を要する．運動方程式の積分の一般的な形（23.9），（23.10）は変わらないが(項の数 s も変わらない)，ただ，重根に対応する係数 $\Delta_{k\alpha}$ がもはや行列式の小行列式ではないというちがいがある．よく知られているように，この場合，小行列式はゼロになる[1)]．

重なった（あるいは，普通よばれるように，**縮重した**）振動数のおのおのは，その重なりの度合いに応じて，いくつかの基準座標に対応するが，その基準座標のえらび方は一意的でない．（同一の ω_α をもつ）基準座標は運動エネルギーおよびポテンシャル・エネルギーのなかに，Q_α の同じ変換に対して同じようにふるまう和 $\sum\dot{Q}_\alpha^2$ および $\sum Q_\alpha^2$ という形で入ってくるから，これらの2乗の和を不変にするような任意の1次変換をほどこすことができる．

不変な外場のなかにおかれた1個の質点の3次元振動に対する基準座標は，きわめて簡単に見いだされる．デカルト座標系の原点を，ポテンシャル・エネルギー $U(x, y, z)$ が極小になる点にとると，U は変数 x, y, z の2次形式となり，運動エネルギー（粒子の質量を m とする）

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

は，座標軸の方向のえらび方によらない．したがって，座標軸の回転によって，ポテンシャル・エネルギーを対角形にもってゆくだけでよい．そうすると，

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2) \qquad (23.14)$$

となり，x, y, z 軸方向の振動は，振動数がそれぞれ

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}, \qquad \omega_3 = \sqrt{\frac{k_3}{m}}$$

の主振動となる．中心対称の場（$k_1 = k_2 = k_3 \equiv k$, $U = kr^2/2$）という特別の場合には，これら3つの振動数は一致する（問題3を見よ）．

基準座標を使うことによって，多くの自由度をもつ系の強制振動の問題を1次元の強制振動の問題に帰着させることが可能になる．系のラグランジアンは，そ

1) 一般解のなかに，指数関数的な因数とならんで時間のベキを因数として含むような項が現われることが不可能なことは，物理的な考察が複素《振動数》を排除することからも明らかである．そのような項があることは，エネルギーの保存則に反するであろう．

れに働く変化する力を考慮に入れて

$$L = L_0 + \sum_k F_k(t) x_k \tag{23.15}$$

となる．ただし，L_0 は自由振動のラグランジアンである． x_k の代わりに基準座標を導入すると，

$$L = \frac{1}{2}\sum_\alpha(\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \sum_\alpha f_\alpha(t) Q_\alpha \tag{23.16}$$

を得る．ここで

$$f_\alpha(t) = \sum_k F_k(t)\frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_\alpha}}$$

という記号を導入した．これに対応する運動方程式

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(t) \tag{23.17}$$

は，それぞれ1個の未知関数 $Q_\alpha(t)$ しか含まない．

問　題

1.　ラグランジアンが

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2) + \alpha xy$$

で与えられる自由度2の系の振動を決定せよ（固有振動数 ω_0 をもつ2つの等しい1次元の系が，相互作用 $-\alpha xy$ で結ばれている）．

解　運動方程式は

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha y, \qquad \ddot{y} + \omega_0^2 y = \alpha x$$

である．(23.6) を代入すると，

$$A_x(\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_y, \qquad A_y(\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_x. \tag{1}$$

特有方程式は $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \alpha^2$ で，これから

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha, \qquad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \alpha$$

となる．$\omega = \omega_1$ ならば方程式 (1) は $A_x = A_y$ を与え，$\omega = \omega_2$ ならば $A_x = -A_y$ を与える．したがって，

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + Q_2), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - Q_2)$$

（係数 $1/\sqrt{2}$ がつくのは，本文で示した，基準座標の規格化のためである）．

$\alpha \ll \omega_0^2$（弱い結合）のときは，

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{\alpha}{2\omega_0}, \qquad \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{\alpha}{2\omega_0}$$

となる．この場合，x と y の変動は，接近した振動数をもつ２つの振動の重ね合わせになる．したがって振動数 $\omega_2-\omega_1=\alpha/\omega_0$ のうなりの特徴をそなえることになる（§22を見よ）．その際，座標 x の振幅がその極大値に達するときに，y の振幅はその極小値に達する，およびその逆である．

2.　２重平面振子（図１）の微小振動を決定せよ．

解　微小振動($\varphi_1\ll 1$，$\varphi_2\ll 1$) に対して，§5の問題１で見いだされたラグランジアンは

$$L=\frac{m_1+m_2}{2}l_1^2\dot{\varphi}_1^2+\frac{m_2}{2}l_2^2\dot{\varphi}_2^2+m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2-\frac{m_1+m_2}{2}gl_1\varphi_1^2-\frac{m_2}{2}gl_2\varphi_2^2$$

となる．運動方程式は

$$(m_1+m_2)l_1\ddot{\varphi}_1+m_2l_2\ddot{\varphi}_2+(m_1+m_2)g\varphi_1=0,$$

$$l_1\ddot{\varphi}_1+l_2\ddot{\varphi}_2+g\varphi_2=0$$

である．(23.6) を代入して，

$$A_1(m_1+m_2)(g-l_1\omega^2)-A_2\omega^2m_2l_2=0,$$

$$-A_1l_1\omega^2+A_2(g-l_2\omega^2)=0.$$

特有方程式の根は

$$\omega_{1,2}^2=\frac{g}{2m_1l_1l_2}\left\{(m_1+m_2)(l_1+l_2)\pm\sqrt{(m_1+m_2)[(m_1+m_2)(l_1+l_2)^2-4m_1l_1l_2]}\right\}$$

である．$m_1\to\infty$ のとき２つの振動数は，それぞれ結合のない２つの振り子の振動に対応する $\sqrt{g/l_1}$, $\sqrt{g/l_2}$ という極限値にむかう．

3.　中心力の場 $U=kr^2/2$ における粒子の運動の軌跡を見いだせ（**空間振動子**とよばれる）．

解　すべての中心力の場におけるのと同様，運動は１つの平面内でおこなわれる．その平面を xy 面にとる．座標 x, y のそれぞれの変化は，同じ振動数 $\omega=\sqrt{k/m}$ をもつ単振動である：

$$x=a\cos(\omega t+\alpha),\qquad y=b\cos(\omega t+\beta),$$

あるいは，

$$x=a\cos\varphi,\qquad y=b\cos(\varphi+\delta)=b\cos\delta\cos\varphi-b\sin\delta\sin\varphi.$$

ただし，$\varphi=\omega t+\alpha$, $\delta=\beta-\alpha$ という記号を導入した．これから $\cos\varphi$ と $\sin\varphi$ とを求め，それらの２乗の和をとると，軌跡の方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\delta=\sin^2\delta$$

が得られる．これは，座標原点を中心する楕円である[1]．$\delta=0$ または π のときには，軌跡

1) ポテンシャル・エネルギー $U=kr^2/2$ をもつ場のなかでは運動は閉じた曲線にそっておこなわれるという事実は，§14 ですでに述べておいた．

は線分になってしまう.

§ 24. 分子の振動

互いに相互作用しているが外場のなかにはおかれていない粒子の系を扱うときには，その自由度のすべてが振動的な性格をもつわけではない．そのような系の典型は分子である．分子内でのつり合いの位置のまわりの原子の振動のほかに，分子全体として並進運動および回転運動をおこなうことができる.

並進運動には3つの自由度が対応する．一般の場合には，回転の自由度も同じ数だけあるから，n 原子分子の自由度 $3n$ のうち全部で $3n-6$ 個だけが振動に対応する．すべての原子が1直線上に並んでいるような分子は例外である．この直線のまわりの回転ということは意味をなさないから，このときの回転の自由度の数は2で，振動の自由度は $3n-5$ である.

分子の振動に関する力学の問題を解くときには，はじめから並進運動および回転運動の自由度を除外して考えるのが目的にかなっている.

並進運動をのぞくためには，分子の全運動量をゼロに等しいとみなす必要がある．この条件は，分子の慣性中心が動かないことを意味するから，この条件を慣性中心の3つの座標が一定であるといい表わすことができる．$\boldsymbol{r}_a=\boldsymbol{r}_{a0}+\boldsymbol{u}_a$ とおくと ($\boldsymbol{r}_{a0}$ は a 番目の原子のつり合いの位置を表わすベクトルで不変，$\boldsymbol{u}_a$ はその原子のつり合いの位置からの変位)，条件

$$\sum m_a\boldsymbol{r}_a=\mathrm{const}\equiv\sum m_a\boldsymbol{r}_{a0}$$

は

$$\sum m_a\boldsymbol{u}_a=0 \tag{24.1}$$

と表わされる.

分子の回転をのぞくためには，分子の全角運動量をゼロに等しいとおかねばならない．角運動量は座標のなんらかの関数の時間に関する完全導関数ではないから，一般には，角運動量がゼロになることをそのような関数がゼロという形に表わすことはできない．しかし，微小振動の場合にはちょうどそれがうまくいく．実際，ふたたび $\boldsymbol{r}_a=\boldsymbol{r}_{a0}+\boldsymbol{u}_a$ とおき，微小変位 $\boldsymbol{u}_a$ の2次以上の項を無視すると，分子の角運動量は

$$\boldsymbol{M}=\sum m_a[\boldsymbol{r}_a\boldsymbol{v}_a]\cong\sum m_a[\boldsymbol{r}_{a0}\dot{\boldsymbol{u}}_a]=\frac{d}{dt}\sum m_a[\boldsymbol{r}_{a0}\boldsymbol{u}_a]$$

と表わされる．したがってこの近似では，角運動量がゼロになることを

$$\sum m_a[\boldsymbol{r}_{a0}\boldsymbol{u}_a]=0 \qquad (24.2)$$

の形に表わすことができる（このとき，座標原点は任意にえらんでよい）．

分子の基準振動は，分子内の原子の配置（つり合いの位置における）の対称性を考察することによって，原子の運動の特徴にしたがって分類することができる．そのためには，群論の使用に基礎をおく一般的な方法があるが，それはこの教程の別の巻[1]で述べる．ここでは二，三の初等的な例をしらべるにとどめる．

分子内の n 個の原子がすべて同一の平面内にあったとすれば，原子がこの平面内にとどまるような基準振動と，原子が平面外にでるような基準振動とが区別される．それらの数を求めることは容易である．平面運動の全部で $2n$ 個の自由度のうち，2つは並進運動，1つは回転運動であるから，原子が平面外にでないような基準振動の数は $2n-3$ である． 残りの $(3n-6)-(2n-3)=n-3$ 個の振動の自由度は，原子が平面外にはみでるような振動に対応する．

線形の分子の場合には，分子のまっすぐな形を変えない縦振動と，原子がこの直線上からはずれる振動とが区別される．n 個の粒子の直線上の運動の自由度は n で，そのうち1つは並進運動の自由度であるから，直線上での振動の数は $n-1$ に等しい．線形分子の振動の自由度は全部で $3n-5$ であるから，原子が直線上からはずれるような振動は $2n-4$ 個ある．しかし，これらの振動のうちことなった振動数をもつのは，$n-2$ 個である．なぜなら，それらの振動のおのおのは，2つの互いに垂直な平面（分子の軸を通る）内でおこなわれる2つの独立な振動に分けることができるが，対称性の考察から明らかなように，それらの基準振動の各対は同一の振動数をもつからである．

問　題[2]

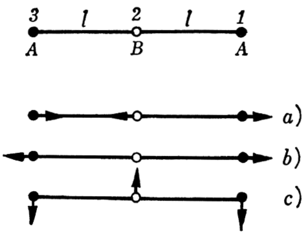


図 28

1. 3個の原子からなる対称な直線状の分子 ABA（図28）の振動数を求めよ．分子のポテンシャル・エネルギーは距離 $A-B$, $B-A$ および角 ABA にだけ依存すると仮定する．

解 原子の縦方向の変位 x_1, x_2, x_3 のあいだには，(24.1) によって

1) 《量子力学》の §100 を見よ．

2) もっと複雑な分子の振動についての計算は，つぎの本に見いだされる：エム・ヴェ・ヴォルケ↗

$$m_A(x_1+x_3)+m_Bx_2=0$$

の関係がある．これを利用して，分子の縦方向の運動のラグランジアン

$$L=\frac{m_A}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_3^2)+\frac{m_B}{2}\dot{x}_2^2-\frac{k_1}{2}[(x_1-x_2)^2+(x_3-x_2)^2]$$

から x_2 を消去し，新しい座標

$$Q_a=x_1+x_3,\qquad Q_s=x_1-x_3$$

を導入する．そうすると，

$$L=\frac{m_A\mu}{4m_B}\dot{Q}_a^2+\frac{m_A}{4}\dot{Q}_s^2-\frac{k_1\mu^2}{4m_B{}^2}Q_a^2-\frac{k_1}{4}Q_s^2$$

となる（$\mu=2m_A+m_B$ は分子の質量）．これから明らかなように，Q_a および Q_s は（規格化定数をのぞいて）基準座標である．座標 Q_a は分子の中心に関して反対称な，振動数

$$\omega_a=\sqrt{\frac{k_1\mu}{m_Am_B}}$$

の振動に対応する（$x_1=x_3$；図28a）．座標 Q_s は，振動数

$$\omega_{s1}=\sqrt{\frac{k_1}{m_A}}$$

の対称な振動に対応する（$x_1=-x_3$；図28b）．

原子の横方向の変位 y_1,y_2,y_3 は，(24.1) および (24.2) によって互いに

$$m_A(y_1+y_3)+m_By_2=0,\qquad y_1=y_3$$

という関係によって結ばれる（対称な屈曲振動；図 28c）．分子の屈曲のポテンシャル・エネルギーを $k_2l^2\delta^2/2$ と書く．ただし，δ は角度 ABA の π からの差で，変位を使って表わすことができる：

$$\delta=\frac{1}{l}[(y_1-y_2)+(y_3-y_2)].$$

変位 y_1,y_2,y_3 をすべて δ で表わすと，横振動のラグランジアンは

$$L=\frac{m_A}{2}(\dot{y}_1^2+\dot{y}_3^2)+\frac{m_B}{2}\dot{y}_2^2-\frac{k_2l^2}{2}\delta^2=\frac{m_Am_B}{4\mu}l^2\dot{\delta}^2-\frac{k_2l^2}{2}\delta^2$$

となる．これから，振動数

$$\omega_{s2}=\sqrt{\frac{2k_2\mu}{m_Am_B}}$$

が得られる．

2. 三角形をした分子 ABA（図29）について同様の問題を解け．

解 (24.1) および (24.2) によって，原子の変位 $\boldsymbol{u}$ の X および Y 方向の成分のあいだに

↘ンシュテイン，エム・ア・エリヤシェヴィッチ，ベ・イ・ステパノフ：分子の振動，国立工学・理論図書出版所，1949；G. Herzberg: *Infrared and Raman Spectra of Polyatomic Molecules*, New York, D. van Nostrand, 1945.

は

$$m_A(x_1+x_3)+m_Bx_2=0,$$
$$m_A(y_1+y_3)+m_By_2=0,$$
$$\sin\alpha(y_1-y_3)-\cos\alpha(x_1+x_3)=0$$

という関係がある．距離 $A-B$ および $B-A$ の変化 $\delta l_1, \delta l_2$ は，ベクトル $\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2$ および $\boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{u}_2$ を AB および BA の方向へ射影したもので表わされる：

$$\delta l_1=(x_1-x_2)\sin\alpha+(y_1-y_2)\cos\alpha,$$
$$\delta l_2=-(x_3-x_2)\sin\alpha+(y_3-y_2)\cos\alpha.$$

角度 ABA の変化は，同じ2つのベクトルを線分 AB, BA に垂直な方向に射影することによって得られる：

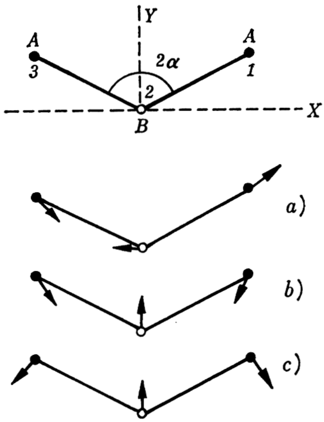


図 29

$$\delta=\frac{1}{l}[(x_1-x_2)\cos\alpha-(y_1-y_2)\sin\alpha]+\frac{1}{l}[-(x_3-x_2)\cos\alpha-(y_3-y_2)\sin\alpha].$$

分子のラグランジアンは，

$$L=\frac{m_A}{2}(\dot{\boldsymbol{u}}_1^2+\dot{\boldsymbol{u}}_3^2)+\frac{m_B}{2}\dot{\boldsymbol{u}}_2^2-\frac{k_1}{2}(\delta l_1^2+\delta l_2^2)-\frac{k_2l^2}{2}\delta^2.$$

新しい座標

$$Q_a=x_1+x_3,\qquad q_{s1}=x_1-x_3,\qquad q_{s2}=y_1+y_3$$

を定義する．これらによってベクトル $\boldsymbol{u}$ の成分を表わすと，

$$x_1=\frac{1}{2}(Q_a+q_{s1}),\qquad x_3=\frac{1}{2}(Q_a-q_{s1}),\qquad x_2=-\frac{m_A}{m_B}Q_a,$$

$$y_1=\frac{1}{2}(q_{s2}+Q_a\cot\alpha),\qquad y_3=\frac{1}{2}(q_{s2}-Q_a\cot\alpha),\qquad y_2=-\frac{m_A}{m_B}q_{s2}$$

となり，ラグランジアンは

$$L=\frac{m_A}{4}\left(\frac{2m_A}{m_B}+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\dot{Q}_a^2+\frac{m_A}{4}\dot{q}_{s1}^2+\frac{m_A\mu}{4m_B}\dot{q}_{s2}^2$$
$$-Q_a^2\frac{k_1}{4}\left(\frac{2m_A}{m_B}+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right)$$
$$-\frac{q_{s1}^2}{4}(k_1\sin^2\alpha+2k_2\cos^2\alpha)-q_{s2}^2\frac{\mu^2}{4m_B^2}(k_1\cos^2\alpha+2k_2\sin^2\alpha)$$
$$+q_{s1}q_{s2}\frac{\mu}{2m_B}(2k_2-k_1)\sin\alpha\cos\alpha$$

となる．これから明らかに，座標 Q_a は，振動数

$$\omega_a^2=\frac{k_1}{m_A}\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right)$$

のY軸に関して反対称な基準振動に対応する（$x_1=x_3, y=-y_3$；図29 a).

座標q_{s1}およびq_{s2}は2つの振動に対応する（Y軸について対称．$x_1=-x_3, y_1=y_3$；図 29 b, c). それぞれの振動数 ω_{s1}, ω_{s2} は，2次の（ω^2について）特有方程式

$$\omega^4-\omega^2\left[\frac{k_1}{m_A}\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\cos^2\alpha\right)+\frac{2k_2}{m_A}\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right)\right]+\frac{2\mu k_1k_2}{m_Bm_A{}^2}=0$$

の根として与えられる．

$2\alpha=\pi$ のとき，これらの振動数はすべて，問題1で見いだされたものに一致する．

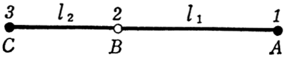


図　30

3. 同じ問題を直線状で非対称な分子 ABC について解け（図30).

解　3つの原子の縦（x）および横（y）の変位のあいだには，つぎの関係がある：

$$m_Ax_1+m_Bx_2+m_Cx_3=0,\qquad m_Ay_1+m_By_2+m_Cy_3=0,$$

$$m_Al_1y_1=m_Cl_2y_3.$$

伸びおよび屈曲のポテンシャル・エネルギーは，

$$\frac{k_1}{2}(\delta l_1)^2+\frac{k_1'}{2}(\delta l_2)^2+\frac{k_2l^2}{2}\delta^2$$

の形に書かれる（$2l=l_1+l_2$). 問題1でおこなったのと同様の計算によって，横振動の振動数の値として

$$\omega_t^2=\frac{k_2l^2}{l_1^2l_2^2}\left(\frac{l_1^2}{m_C}+\frac{l_2^2}{m_A}+\frac{4l^2}{m_B}\right)$$

が，また，2つの縦振動の振動数 ω_{l1}, ω_{l2} をきめる（ω^2について）2次の方程式として

$$\omega^4-\omega^2\left[k_1\left(\frac{1}{m_A}+\frac{1}{m_B}\right)+k_1'\left(\frac{1}{m_B}+\frac{1}{m_C}\right)\right]+\frac{\mu k_1k_1'}{m_Am_Bm_C}=0$$

が得られる．

§ 25. 減 衰 振 動

これまでわれわれはいつも，物体の運動は真空中でおこなわれる，あるいは，媒質の運動に対する影響は無視できるということを暗に前提していた．実際は，媒質内で物体が運動するとき，媒質は運動の速度を減少させるような抵抗をおよぼす．このとき運動する物体のエネルギーは，最後には熱に変わる，いいかえると，散逸してしまう．

このような条件のもとでの運動はもはや純力学的な過程ではない．それを考察

するには，媒質の運動や，媒質および物体の内部の熱的な状態を考慮に入れることが必要である．とりわけ，一般的にいって，運動する物体の加速度は与えられた瞬間の物体の座標と速度だけの関数であると主張することはできない．すなわち，力学におけるのと同様の意味での運動方程式は存在しない．そういうわけで，媒質内での物体の運動に関する問題は，力学の問題ではないのである．

けれども，ある特定の場合には，一定の付加項を導入することによって，媒質中の運動を運動方程式によって近似的に記述することができる．そのような場合の1つは，媒質内での散逸的過程を特徴づける振動数にくらべてずっと小さい振動数をもつ振動である．この条件がみたされているときは，物体には（与えられた一様な媒質について）その速度だけに依存する**摩擦力**が働くとみなすことができる．

そのうえ，この速度が十分小さければ，摩擦力をそのベキで展開できる．静止している物体にはいかなる摩擦力も働かないから，展開の0次の項はゼロに等しい．最初のゼロでない項は速度に比例する．したがって，一般座標xの1次元微小振動をおこなっている系に働く一般化された摩擦力$f_{\text{摩擦}}$は，

$$f_{\text{摩擦}} = -\alpha\dot{x}$$

と書くことができる．ここにαは正の係数で，その前の $-$ の符号は，力が速度とは反対の向きに働くことを表わす．この力を運動方程式の右辺に付け加えて

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} \tag{25.1}$$

を得る（(21.4) を見よ)．これをmで割って，

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \qquad \frac{\alpha}{m} = 2\lambda \tag{25.2}$$

という記号を導入する．ω_0は摩擦がないときの系の自由振動数である．λという量は，**減衰率**とよばれる[1]．こうして，方程式

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{25.3}$$

が得られる．定数係数の線形方程式の一般的な解き方にしたがって $x = e^{rt}$ とおくと，rに対する特有方程式

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

が得られる．方程式 (25.3) の一般解は

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \qquad r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.$$

---

1) 無次元の積 λT($T = 2\pi/\omega$ は周期) は対数減衰度とよばれる．

ここで2つの場合を区別しなければならない.

$\lambda < \omega_0$ ならば, r の2つの値は複素共役である. この場合の運動方程式の一般解は,

$$x = \mathrm{Re}\{A \exp(-\lambda t + it\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2})\}$$

のように表わすことができる. ただし, Aは任意の複素定数である. あるいはまた, a および α を実の定数として,

$$x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha), \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \tag{25.4}$$

とも書ける. これらの式によって表わされる運動は, いわゆる**減衰振動**である. それは, 振幅が指数関数的に減少してゆく調和振動とみなすことができる. 振幅の減少してゆく速さは減衰率 λ によってきまる. 《振動数》 ω は, 摩擦がないときの自由振動数よりも小さい. $\lambda \ll \omega_0$ のときは, ω と ω_0 の差は2次の微小量である. 摩擦があるときに振動数が小さくなることは, 当然まえもって予期されるところである. というのは, 一般に摩擦は運動を遅らせるものだからである.

$\lambda \ll \omega_0$ ならば, 1周期 $2\pi/\omega$ の後にも, 減衰振動の振幅はほとんど変化しない. この場合には, 因数 $e^{-\lambda t}$ の変化は無視して, 座標および速度の2乗の（1周期にわたっての）平均値を考えることに意味がある. この2乗平均は明らかに $e^{-2\lambda t}$ に比例する. したがって, 系のエネルギーもまた, 平均して

$$\bar{E} = E_0 e^{-2\lambda t} \tag{25.5}$$

という法則にしたがって減少する. ここに E_0 はエネルギーの初期値である.

つぎに $\lambda > \omega_0$ としよう. このとき r の値はともに実であり, そのうえ両方とも負である. 解の一般的な形は

$$x = c_1 e^{-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} \tag{25.6}$$

となる. これは摩擦が十分大きいときにおこる場合であるが, そのときの運動は $|x|$ の単調な減少, すなわち, 振動せずにつり合いの位置へ漸近的に（$t \to \infty$ のとき）近づく運動である. このような型の運動を**非周期的減衰**という.

最後に $\lambda = \omega_0$ という特別の場合には, 特有方程式はたった1つの等根（重根）$r = -\lambda$ をもつ. このときの微分方程式の一般解は, よく知られているように

$$x = (c_1 + c_2 t)e^{-\lambda t} \tag{25.7}$$

と書かれる. これは非周期的減衰の特別の場合である. そして, かならずしも単調ではないが, やはり振動的な性格をもたない.

たくさんの自由度をもつ系では, 各座標 x_i に対応する一般化された摩擦力は,

速度の1次関数である：

$$f_{i\text{摩擦}} = -\sum_k \alpha_{ik}\dot{x}_k. \tag{25.8}$$

純力学的な考察からは，係数 α_{ik} の添字 i, k についての対称性に関しては何も結論することができない．しかし，統計物理学の方法を使うと[1]，つねに

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} \tag{25.9}$$

であることを示すことができる．したがって，表式（25.8）は，つぎの2次形式の導関数の形に書くことができる：

$$f_{i\text{摩擦}} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}. \tag{25.10}$$

ただし，F は

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i,k} \alpha_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k \tag{25.11}$$

であって，**散逸関数**とよばれる．

力（25.10）をラグランジュ方程式の右辺に加えなければならない：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}. \tag{25.12}$$

散逸関数はそれ自身，重要な物理的意味をもっている．系のエネルギーの散逸の度合いがそれによってきまるのである．このことは，系の力学的エネルギーの時間についての導関数を計算することによって容易にたしかめられる．すなわち

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{x}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L\right) = \sum_i \dot{x}_i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right) = -\sum_i \dot{x}_i\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}.$$

F は速度の2次関数であるから，同次関数についてのオイラーの定理によって，この式の右辺の和は $2F$ に等しい．こうして，

$$\frac{dE}{dt} = -2F. \tag{25.13}$$

すなわち，系のエネルギーが変化する速さは，散逸関数の2倍で与えられる．散逸的な過程はエネルギーの減少に導くから，つねに $F > 0$ でなければならない．いいかえると，2次形式（25.11）は正確定でなければならない．

摩擦があるときの微小振動の方程式は，力（25.8）を方程式（23.5）の右辺に加えることによって得られる：

$$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k + \sum_k k_{ik}x_k = -\sum_k \alpha_{ik}\dot{x}_k. \tag{25.14}$$

1）《統計物理学》，§123 を見よ．

この方程式で

$$x_k = A_k e^{rt}$$

とおき，e^{rt} で約分すると，定数 A_k に対する線形代数方程式の組

$$\sum_k (m_{ik}r^2 + \alpha_{ik}r + k_{ik})A_k = 0 \tag{25.15}$$

が得られる．この連立方程式の行列式をゼロとおくと，r の値をきめる特有方程式

$$|m_{ik}r^2 + \alpha_{ik}r + k_{ik}| = 0 \tag{25.16}$$

が見いだされる．

これは r に関して $2s$ 次の方程式である．その係数はすべて実数であるから，その根は実数，あるいは，互いに複素共役な対からできている．そして，実根はかならず負であり，複素根もその実部は負である．もしその逆であったとすると，系の座標も速度も，それとともにエネルギーも時間とともに指数関数的に増大するが，他方散逸的な力はエネルギーの減少に導くはずのものである．

§ 26. 摩擦があるときの強制振動

摩擦があるときの強制振動は，§22 でとりあげた摩擦のない振動とまったく同様のやり方で考察することができる．ここではもっぱら，独特の興味がある周期的な強制力の場合をくわしくしらべることにする．方程式 (25.1) の右辺に強制力 $f\cos\gamma t$ を付け加えて m で割ると，つぎの運動方程式が得られる：

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\cos\gamma t. \tag{26.1}$$

この方程式の解は複素数の形に求めるのが便利である．そのために，右辺で $\cos\gamma t$ の代わりに $e^{i\gamma t}$ と書くと

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}e^{i\gamma t}.$$

特殊解を $x = Be^{i\gamma t}$ の形におくと，B に対して

$$B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)} \tag{26.2}$$

が得られる．B を $be^{i\delta}$ の形になおすと，b と δ はそれぞれ

$$b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2-\gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}, \qquad \tan\delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{26.3}$$

となる．最後に，$Be^{i\gamma t} = be^{i(\gamma t+\delta)}$ という表現から実数部分を分離して，方程式

(26.1) の特殊解が得られる. それに, 右辺がない場合の一般解 (議論を確定するために, $\omega_0 > \lambda$ の場合の解を書く) を加えると, 結局

$$x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\gamma t + \delta) \tag{26.4}$$

が得られる. 右辺の第1項は時間とともに指数関数的に減少するから, 十分長い時間がたったのちには, 第2項だけが残る:

$$x = b\cos(\gamma t + \delta). \tag{26.5}$$

強制振動の振幅 b の表式 (26.3) も, 振動数 γ が ω_0 に近づくにつれて増大するけれども, 摩擦がないときの共鳴のように無限大になることはない. 力 f の振幅が与えられたとき, 振動の振幅は $\gamma = \sqrt{\omega_0{}^2 - 2\lambda^2}$ という振動数に対して最大になる. $\lambda \ll \omega_0$ のときには, この γ の値と ω_0 との差は2次の微小量にすぎない.

共鳴の近くの領域をしらべよう. ε を微小量として $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$ とおく. また, $\lambda \ll \omega_0$ とする. そうすると (26.2) で近似的に

$$\gamma^2 - \omega_0{}^2 = (\gamma + \omega_0)(\gamma - \omega_0) \approx 2\omega_0\varepsilon, \qquad 2i\lambda\gamma \approx 2i\lambda\omega_0$$

とおくことができ, したがって,

$$B = -\frac{f}{2m(\varepsilon - i\lambda)\omega_0} \tag{26.6}$$

あるいは

$$b = \frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}}, \qquad \tan\delta = \frac{\lambda}{\varepsilon} \tag{26.7}$$

となる.

強制力の振動数が変化する際の, 振動と強制力との位相の差 δ の変わり方の特徴に注意しよう. この位相の差はつねに負である. すなわち, 振動は外力に対して《遅れる》のである. 共鳴から遠ざかると, $\gamma < \omega_0$ の側では δ はゼロにむかい, $\gamma > \omega_0$ の側では $-\pi$ に近づく. δ のゼロから $-\pi$ までの変化は, 振動数でいえば ω_0 に近いせまい領域 (λ の程度の幅) でおこる. $\gamma = \omega_0$ のとき位相の差は $-\frac{\pi}{2}$ を通過する. これに関連して, 摩擦がないとき, 強制振動の位相の差は $\gamma = \omega_0$ で π だけ飛躍することに注意する ((22.4) で第2項が符号を変える). 摩擦の存在は, この飛躍を《ならし》てしまうのである.

系の強制振動が (26.5) のような運動に落着いたあとでは, 系のエネルギーは一定にとどまる. そのとき系は, 摩擦のために散逸されるだけのエネルギーを, (外力の源泉から) たえず吸収しつづけるのである. 単位時間に平均において

吸収されるエネルギーを，外力の振動数の関数として $I(\gamma)$ で表わそう．(25.13) によって

$$I(\gamma)=2\overline{F}$$

である．ただし，$\overline{F}$ は散逸関数の（振動の周期にわたっての）平均値である．1次元の運動に対しては，散逸関数の表現 (25.11) は $F=\alpha\dot{x}^2/2=\lambda m\dot{x}^2$ となる．これを (26.5) に代入して

$$F=\lambda mb^2\gamma^2\sin^2(\gamma t+\delta)$$

を得る．正弦関数の2乗の時間平均は 1/2 であるから，

$$I(\gamma)=\lambda mb^2\gamma^2. \tag{26.8}$$

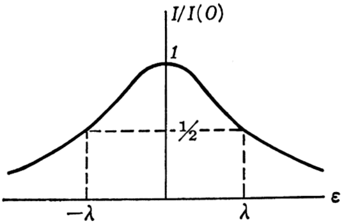


図 31

共鳴の近くでは，(26.7) の振幅を代入して

$$I(\varepsilon)=\frac{f^2}{4m}\frac{\lambda}{\varepsilon^2+\lambda^2} \tag{26.9}$$

を得る．このような形で振動数に依存する吸収を**分散的**とよぶ． 関数 $I(\varepsilon)$ が $\varepsilon=0$ における極大値のちょうど半分にまで減少したときの $|\varepsilon|$ の値を，共鳴曲線（図31）の半値幅とよぶ．(26.9) 式から明らかなように， いまの場合この半値幅は減衰率 λ に一致する．極大の高さ

$$I(0)=\frac{f^2}{4m\lambda}$$

は λ に反比例する．したがって，減衰率が小さくなるほど共鳴曲線は狭く，かつ高くなる．つまり，極大は鋭くなる．共鳴曲線の下の面積はこのときにも不変のままである．

この面積は積分

$$\int_0^\infty I(\gamma)d\gamma=\int_{-\omega_0}^\infty I(\varepsilon)d\varepsilon$$

によって与えられる．$I(\varepsilon)$ は $|\varepsilon|$ が大きくなると急激に減少し，$|\varepsilon|$ の大きなところは重要でないから，積分記号下の $I(\varepsilon)$ を (26.9) でおきかえ，積分の下限を $-\infty$ に変えることができる．そうすると，

$$\int_{-\infty}^\infty I(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{f^2\lambda}{4m}\int_{-\infty}^\infty\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2+\lambda^2}=\frac{\pi f^2}{4m} \tag{26.10}$$

となる．

問　題

外力 $f = f_0 e^{\alpha t}\cos\gamma t$ が働くときの，摩擦のある強制振動を決定せよ．

解　運動方程式を複素形

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m}e^{\alpha t + i\gamma t}$$

にしておいて解き，そののち，解の実部を取り出す．その結果，強制振動は

$$x = be^{\alpha t}\cos(\gamma t + \delta)$$

の形に求められる．ここに

$$b = \frac{f_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 + \alpha^2 - \gamma^2 + 2\alpha\lambda)^2 + 4\gamma^2(\alpha + \lambda)^2}},$$

$$\tan\delta = -\frac{2\gamma(\alpha + \lambda)}{\omega_0^2 - \gamma^2 + \alpha^2 + 2\alpha\lambda}.$$

§ 27.　パラメター共鳴

孤立していない振動系で，外からの影響によってそのパラメターが時間的に変化するようなものがある[1]．

1次元の系ではラグランジアン (21.3) に現われる係数 m と k がパラメターである．それらが時間に関係するとすれば，運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0 \tag{27.1}$$

となる．t の代わりに，$d\tau = dt/m(t)$ によって新しい独立変数 τ を導入すると，この方程式は

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + mkx = 0$$

となる．したがって，

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(t)x = 0 \tag{27.2}$$

という形の運動方程式を考察すれば，実際上なんら一般性をそこなわずに，十分な結果が得られる．これは，(27.1) で $m = \text{const}$ としても得られるものである．

1) そのような系の簡単な例は，支点が鉛直方向に周期的な運動をする振り子である（問題3を見よ）．

関数 $\omega(t)$ の形は，問題の条件によってきまる．この関数は，ある振動数 γ (および周期 $T=2\pi/\gamma$) をもつ周期関数であると仮定しよう．このことは

$$\omega(t+T)=\omega(t)$$

を意味する．したがって，方程式 (27.2) の全体も $t\to t+T$ という変換に関して不変である．このことから，$x(t)$ が方程式の解ならば，関数 $x(t+T)$ もまた解であることが導かれる．いいかえると，$x_1(t)$ と $x_2(t)$ を方程式 (27.2) の2つの独立な積分とすれば，$t\to t+T$ という変化に際して，これらはお互いのあいだで線形の変換をうける．そこで，t から $t+T$ への変化に際して，x_1, x_2 がそれぞれ単に定数倍されるだけになるように，x_1, x_2 を選ぶことができる[1]：

$$x_1(t+T)=\mu_1 x_1(t), \qquad x_2(t+T)=\mu_2 x_2(t).$$

このような性質をもつ関数のもっとも一般的な形は

$$x_1(t)=\mu_1{}^{t/T}\Pi_1(t), \qquad x_2(t)=\mu_2{}^{t/T}\Pi_2(t) \tag{27.3}$$

である．ここに $\Pi_1(t), \Pi_2(t)$ は時間の純粋に周期的な関数である (周期 T)．

これらの関数に含まれる定数 μ_1, μ_2 のあいだには，一定の関係がなければならない．実際，方程式

$$\ddot{x}_1+\omega^2(t)x_1=0, \qquad \ddot{x}_2+\omega^2(t)x_2=0$$

にそれぞれ x_2, x_1 をかけ，たがいに引き算をすると，

$$\ddot{x}_1x_2-\ddot{x}_2x_1=\frac{d}{dt}(\dot{x}_1x_2-x_1\dot{x}_2)=0.$$

あるいは，

$$\dot{x}_1x_2-x_1\dot{x}_2=\mathrm{const} \tag{27.4}$$

が得られる．ところが，$x_1(t)$ および $x_2(t)$ が (27.3) の形の任意の関数のとき，変数 t が T だけ変化すると，この等式の左辺は $\mu_1\mu_2$ 倍される．したがって，あらゆる場合に等式 (27.4) がみたされるためには

$$\mu_1\mu_2=1 \tag{27.5}$$

でなければならないことは明らかである．

方程式 (27.2) の係数が実であることをもとにして，さらに定数 μ_1, μ_2 についての結論をひき出すことができる．$x(t)$ をそのような方程式の任意の解とすれば，それに複素共役な関数 $x^*(t)$ も同じ方程式を満足しなければならない．こ

1)　定数 μ_1 と μ_2 とが一致しさえしなければ．

のことから，一対の定数 μ_1, μ_2 は μ_1^*, μ_2^* の対に一致しなければならない．すなわち，$\mu_1=\mu_2^*$ であるか，でなければ μ_1 も μ_2 も実数でなければならない． 第1の場合には，(27.5) を考え合わせると $\mu_1=1/\mu_1^*$，すなわち $|\mu_1|^2=|\mu_2|^2=1$ である．定数 μ_1 および μ_2 は絶対値が1である．

第2の場合には，方程式 (27.2) の2つの独立な解は，1とことなる正または負の実数 μ を使って

$$x_1(t)=\mu^{t/T}\Pi_1(t), \qquad x_2(t)=\mu^{-t/T}\Pi_2(t) \tag{27.6}$$

と書ける．これらのうち一方は（$|\mu|>1$ または $|\mu|<1$ にしたがって前者または後者）時間とともに指数関数的に増大する．これは，（つり合いの位置 $x=0$ における）系の静止状態が安定でないことを意味する．この状態からのどんなわずかのずれも，そうして生じた x の変位を時間とともに急激に増大させるのに十分である．この現象は**パラメター共鳴**とよばれる．

x および $\dot{x}$ の初期値が厳密にゼロに等しければ，それらはその後もずっとゼロであるということに注意しよう．これは，初期値がゼロに等しくても，変位の時間的な増大（t に比例する）が生ずる通常の共鳴（§ 22）とことなる点である．

関数 $\omega(t)$ がある一定の大きさ ω_0 とわずかしかことならず，しかも単純な周期関数である：

$$\omega^2(t)=\omega_0^2(1+h\cos\gamma t) \tag{27.7}$$

という重要な場合について，パラメター共鳴が生ずるための条件を明らかにしよう．ここに定数 $h\ll 1$ とする(われわれは h を正とみなす．時間の原点を適当にえらべばいつでもそのようにすることができる)．後でわかるように，関数 $\omega(t)$ の振動数が振動数 ω_0 の2倍に近いときに， もっとも強いパラメター共鳴がおこる．そこで $\varepsilon\ll\omega_0$ として

$$\gamma=2\omega_0+\varepsilon$$

とおこう．

運動方程式[1]

$$\ddot{x}+\omega_0^2[1+h\cos(2\omega_0+\varepsilon)t]x=0 \tag{27.8}$$

の解を

$$x=a(t)\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+b(t)\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t \tag{27.9}$$

1) 任意の γ および h を含むこのような形の方程式は，数理物理学ではマチウ (Mathieu) 方程式とよばれる．

の形に求める．ただし，$a(t)$ および $b(t)$ はゆっくり（乗数の cos や sin にくらべて）時間的に変化する関数である．もちろん，このような形の解は正確ではない．実際は，関数 $x(t)$ には，$\omega_0+\varepsilon/2$ と $(2\omega_0+\varepsilon)$ の整数倍だけことなるような振動数をもつ項が含まれる．しかしながら，それらの項は h について高次の微小量であるので，第1近似では無視することができる（問題1を見よ）．

（27.9）を（27.8）に代入して計算し，ε について1次の項だけを残す．その際，$\dot a\sim\varepsilon a, \dot b\sim\varepsilon b$ と仮定する（共鳴の条件のもとでこの仮定が正しいことは，結果によって確認される）．三角関数の積を和に分解する：

$$\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t\cdot\cos(2\omega_0+\varepsilon)t$$
$$=\frac{1}{2}\cos\left(3\omega_0+\frac{3\varepsilon}{2}\right)t+\frac{1}{2}\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t,\ \text{等々}.$$

そして，上に述べた注意にしたがって，振動数 $3(\omega_0+\varepsilon/2)$ の項をおとす．こうして得られる結果は，

$$-\left(2\dot a+b\varepsilon+\frac{h\omega_0}{2}b\right)\omega_0\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t$$
$$+\left(2\dot b-a\varepsilon+\frac{h\omega_0}{2}a\right)\omega_0\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t=0.$$

この等式がみたされるためには，sin および cos にかかっている係数のおのおのが同時にゼロになることが必要である．この要求から，関数 $a(t)$ および $b(t)$ に対する2つの線形微分方程式が得られる．一般的なやり方にしたがって，解は e^{st} に比例する形であるとする．そうすると，

$$sa+\frac{1}{2}\left(\varepsilon+\frac{h\omega_0}{2}\right)b=0,\qquad \frac{1}{2}\left(\varepsilon-\frac{h\omega_0}{2}\right)a-sb=0.$$

これら2つの代数方程式が両立するための条件から，

$$s^2=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2-\varepsilon^2\right].\tag{27.10}$$

パラメター共鳴がおこるための条件は，s が実である（すなわち，$s^2>0$）ことである[1]．したがって，振動数 $2\omega_0$ のまわりの

$$-\frac{h\omega_0}{2}<\varepsilon<\frac{h\omega_0}{2}\tag{27.11}$$

1）（27.6）の定数 μ は s と $\mu=-e^{s\pi/\omega_0}$ という関係によって結ばれる（t が $t+2\pi/2\omega_0$ に変化するとき，（27.9）の cos および sin は符号を変える）．

という区間においてパラメター共鳴が生ずる[1]．この区間の幅はhに比例し，そのなかで生ずる振動の増大の指数sと同じ程度の大きさである．

パラメター共鳴は，系のパラメターの変化の振動数γが$2\omega_0/n$（ただし，nは任意の整数）に近いときにも生ずる．けれども，共鳴領域（不安定領域）の幅は，nの増大とともに急激に——h^nのように——減少する（問題2を見よ）．そして，そのとき振動の増大の指数も同様に減少する．

パラメター共鳴の現象は，系内に弱い摩擦の影響があるときにも生ずるが，このときには，不安定領域がいくぶんせばまる．§25で見たように，摩擦は，振動の振幅を$e^{-\lambda t}$にしたがって減衰させる．したがって，パラメター共鳴による振幅の増大は$e^{(s-\lambda)t}$のようにおこなわれ（sは正で，摩擦がないときの解によって与えられる），不安定領域の限界は等式$s-\lambda=0$によってきまる．（27.10）のsを利用すると共鳴領域として（27.11）の代わりに不等式

$$-\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2-4\lambda^2}<\varepsilon<\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2-4\lambda^2} \qquad (27.12)$$

が得られる．

このとき共鳴はどんな小さな振幅hに対しても可能なのでなく，一定の《しきい値》h_kを超えてはじめて生ずることに注意しよう．（27.12）の場合，これは

$$h_k=\frac{4\lambda}{\omega_0}$$

に等しい．振動数$2\omega_0/n$の近くの共鳴に対するしきい値h_kは$\lambda^{1/n}$に比例すること，すなわち，nの増大とともに増大することが示される．

問　題

1. $\gamma=2\omega_0$の近くでの共鳴に対する不安定領域の限界をh^2の程度の正確さで求めよ．

解　（27.8）の解を

$$x=a_0\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+b_0\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t$$
$$+a_1\cos 3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+b_1\sin 3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

とおく．ただし，ここでは（(27.9)にくらべて）hのつぎの次数の項までが考慮されてい

1）共鳴領域の限界だけに興味があるならば（そのなかでのsの表現には関心がなくて），この限界では$s=0$，すなわち，（27.9）の係数aとbは定数になることに注意すると計算が簡単化される．そうすると一挙に，区間（27.11）の限界に対応する$\varepsilon=\pm h\omega_0/2$という値が得られる．

る．関心があるのは不安定領域の限界だけであるから， 係数 a_0, b_0, a_1, b_1 は定数と仮定する（103ページの脚注1で与えた注意にしたがって）．上の x を（27.8）に代入したとき，三角関数の積は和の形になおし，振動数 $5\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)$をもつ項をおとす．この項はもっと高い近似でのみ必要になるものである．こうして，

$$\left[-a_0\left(\omega_0\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)+\frac{h\omega_0^2}{2}a_0+\frac{h\omega_0^2}{2}a_1\right]\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t$$
$$+\left[-b_0\left(\omega_0\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)-\frac{h\omega_0^2}{2}b_0+\frac{h\omega_0^2}{2}b_1\right]\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t$$
$$+\left[\frac{h\omega_0^2}{2}a_0-8\omega_0^2 a_1\right]\cos 3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t$$
$$+\left[\frac{h\omega_0^2}{2}b_0-8\omega_0^2 b_1\right]\sin 3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t=0$$

を得る．振動数 $\omega_0+\varepsilon/2$ の項では，1次および2次の微小量を残し，振動数$3(\omega_0+\varepsilon/2)$ の項では1次の微小量だけを残した． 角括弧のなかの表現のおのおのが別個にゼロにならなければならない．あとの2つから，

$$a_1=\frac{h}{16}a_0, \qquad b_1=\frac{h}{16}b_0.$$

これを使って最初の2つから

$$\omega_0\varepsilon\pm\frac{h\omega_0^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4}-\frac{h^2\omega_0^2}{32}=0$$

が得られる．

この式を h^2 の程度の正確さで解くと，求める ε の限界値が得られる：

$$\varepsilon=\pm\frac{h\omega_0}{2}-\frac{1}{32}h^2\omega_0.$$

2. $\gamma=\omega_0$ の近くでの共鳴に対する不安定領域の限界を定めよ．

解 $\gamma=\omega_0+\varepsilon$ と書きなおして，運動方程式

$$\ddot{x}+\omega_0^2[1+h\cos(\omega_0+\varepsilon)t]x=0$$

を得る．求める限界の値は $\varepsilon\sim h^2$ であることを考えに入れて，解を

$$x=a_0\cos(\omega_0+\varepsilon)t+b_0\sin(\omega_0+\varepsilon)t$$
$$+a_1\cos 2(\omega_0+\varepsilon)t+b_1\sin 2(\omega_0+\varepsilon)t+c_1$$

の形におく．ここでは，2番目の次数までの項を考慮してある． 不安定領域の限界をきめるために，ふたたび係数は定数であると仮定すると，

$$\left[-2\omega_0\varepsilon a_0+\frac{h\omega_0^2}{2}a_1+h\omega_0^2c_1\right]\cos(\omega_0+\varepsilon)t$$
$$+\left[-2\omega_0\varepsilon b_0+\frac{h\omega_0^2}{2}b_1\right]\sin(\omega_0+\varepsilon)t$$

$$+\left[-3\omega_0^2 a_1 + \frac{h\omega_0^2}{2}a_0\right]\cos 2(\omega_0+\varepsilon)t$$

$$+\left[-3\omega_0^2 b_1 + \frac{h\omega_0^2}{2}b_0\right]\sin 2(\omega_0+\varepsilon)t + \left[c_1\omega_0^2 + \frac{h\omega_0^2}{2}a_0\right] = 0$$

が得られる．これから

$$a_1 = \frac{h}{6}a_0, \qquad b_1 = \frac{h}{6}b_0, \qquad c_1 = -\frac{h}{2}a_0.$$

これによって不安定領域の2つの限界は

$$\varepsilon = -\frac{5}{24}h^2\omega_0, \qquad \varepsilon = \frac{1}{24}h^2\omega_0$$

となる．

3. 支点が鉛直方向に振動している平面振子の微小振動に対するパラメター共鳴の条件を見いだせ．

解 §5の問題3cで見いだしたラグランジアンによって，微小振動（$\varphi \ll 1$）に対する運動方程式は

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\left(1 + 4\frac{a}{l}\cos(2\omega_0+\varepsilon)t\right)\varphi = 0$$

である（$\omega_0^2 = g/l$）．これから明らかなように，本文で導入したパラメター h にあたるのは比 $4a/l$ である．そこで条件（27.11）は

$$|\varepsilon| < \frac{2a\sqrt{g}}{l^{3/2}}$$

となる．

§28. 非調和振動

上に述べた微小振動の理論はすべて，系の運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーを速度と座標で展開し，2次の項だけを残すことを基礎にしていた．この近似では運動方程式が線形になり，その振動は**線形**といわれる．振幅が十分小さいという条件のもとでは，そのような展開はまったく適切であるが，つぎの近似にすすむと（**非調和振動**あるいは**非線形振動**とよばれる），弱くはあるが質的に新しい運動の特質が現われる．

ラグランジアンの展開を2次までおこなおう．そうすると，ポテンシャル・エネルギーには座標 x_i の3次の項が現われ，運動エネルギーには，$\dot{x}_i\dot{x}_k x_l$ という形の速度と座標との積が現われる．このような以前の表現（23.3）とのちがいは，関数 $a_{ik}(q)$ の展開において x について1次の項を残したことから生じたのである．このようにして，ラグランジアンの形は

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k-k_{ik}x_ix_k)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,k,l}n_{ikl}\dot{x}_i\dot{x}_kx_l-\frac{1}{3}\sum_{i,k,l}l_{ikl}x_ix_kx_l \qquad (28.1)$$

となる．ただし，n_{ikl} および l_{ikl} は新しい定数係数である．

任意の座標 x_i から（線形振動の）基準座標 Q_α に移ると，この変換が線形であることのために，(28.1) の第3，第4の項は類似の形の和に移る．ただし，座標 x_i および速度 $\dot{x}_i$ に Q_α および $\dot{Q}_\alpha$ が代わる．これらの和の係数を $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$, $\mu_{\alpha\beta\gamma}$ で表わすと，ラグランジアンは

$$L=\frac{1}{2}\sum_\alpha(\dot{Q}_\alpha^2-\omega_\alpha^2Q_\alpha^2)+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\lambda_{\alpha\beta\gamma}\dot{Q}_\alpha\dot{Q}_\beta Q_\gamma-\frac{1}{3}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\mu_{\alpha\beta\gamma}Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma \qquad (28.2)$$

となる．

このラグランジアンから得られる運動方程式をくわしく書くことはやめる．本質的なのは，それが

$$\ddot{Q}_\alpha+\omega_\alpha^2Q_\alpha=f_\alpha(Q,\dot{Q},\ddot{Q}) \qquad (28.3)$$

の形をしていることである．ここに f_α は，座標 Q およびその時間についての導関数の2次の同次関数である．

逐次近似の方法にしたがって，この方程式の解を

$$Q_\alpha=Q_\alpha^{(1)}+Q_\alpha^{(2)} \qquad (28.4)$$

の形におく．ここで $Q_\alpha^{(2)}\ll Q_\alpha^{(1)}$ で，関数 $Q_\alpha^{(1)}$ は《摂動のない》方程式

$$\ddot{Q}_\alpha^{(1)}+\omega_\alpha^2Q_\alpha^{(1)}=0$$

をみたす．すなわち，$Q_\alpha^{(1)}$ 自身は普通の調和振動を表わす．

$$Q_\alpha^{(1)}=a_\alpha\cos(\omega_\alpha t+\alpha_\alpha). \qquad (28.5)$$

つぎの近似にすすんで，方程式 (28.3) の右辺で1次の微小量の項だけを残すと，$Q_\alpha^{(2)}$ に対する方程式

$$Q_\alpha^{(2)}+\omega_\alpha^2Q_\alpha^{(2)}=f_\alpha(Q^{(1)},\dot{Q}^{(1)},\ddot{Q}^{(1)}) \qquad (28.6)$$

が得られる．これの右辺には，(28.5) の表現を代入しなければならない．その結果，線形の非同次微分方程式が得られるが，その右辺は単周期関数の和の形になおすことができる．たとえば

$$Q_\alpha^{(1)}Q_\beta^{(1)}=a_\alpha a_\beta\cos(\omega_\alpha t+\alpha_\alpha)\cos(\omega_\beta t+\alpha_\beta)$$

$$= \frac{1}{2}a_\alpha a_\beta\{\cos[(\omega_\alpha + \omega_\beta)t + \alpha_\alpha + \alpha_\beta] + \cos[(\omega_\alpha - \omega_\beta)t + \alpha_\alpha - \alpha_\beta]\}.$$

このように方程式（28.6）の右辺には，系の固有振動数の和および差に等しい振動数をもつ振動に対応する項が存在する．方程式の解は，そのような周期的因数を含む形をしていなければならない．こうして，第2次近似では，振動数 ω_α の系の固有振動に，振動数

$$\omega_\alpha \pm \omega_\beta \tag{28.7}$$

をもつ付加的な振動が重なるという結論に達する（そのなかには，2倍の振動数 $2\omega_\alpha$ や，変位が一定であることに対応する振動数0が含まれる）．これらの振動数は**結合振動数**とよばれる．結合振動の振幅は，対応する基準振動の振幅の積 $a_\alpha a_\beta$（または2乗 a_α^2）に比例する．

近似をすすめてラグランジアンの展開でより高次の項まで取り入れると，もっと多くの振動数 ω_α の和や差に等しい振動数をもつ結合振動が生ずる．しかし，そのほかにもさらに新しい現象が生ずる．

第3近似ですでに，結合振動数のうちに最初の振動数 ω_α に一致するものが現われる（$\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\beta$）．したがって，上に述べた方法を運動方程式の右辺に適用すると，共鳴項が現われて，そのため，時間とともに振幅の増大するような項が解のなかに含まれるようになる．しかしながら，物理的に明らかなように，外部のエネルギー源をもたない孤立系では，振動の強度の増大が自発的に生ずることは不可能である．

実際には，高い近似では基礎振動数 ω_α が，ポテンシャル・エネルギーの2次的な表現に現われる《非摂動》値 $\omega_\alpha^{(0)}$ にくらべてちがってくる．解のなかに増大項が現われるのは，

$$\cos(\omega_\alpha^{(0)} + \Delta\omega_\alpha)t \approx \cos\omega_\alpha^{(0)}t - t\Delta\omega_\alpha \sin\omega_\alpha^{(0)}t$$

という形の展開にもとづくのであるが，明らかに，十分大きな t に対してはこれは許されない．

したがって，さらに近似をすすめる際には，解に入ってくる因数が，はじめから近似的な値でなくて正確な値の振動数をもつように，逐次近似法を変更しなければならない．ところで，このような振動数の変化は，運動方程式を解いた結果において，まさに共鳴項が存在しないという条件からきまるのである．

この方法を，自由度1の非調和振動について示そう．ラグランジアンをつぎの

形に書く．

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{m\omega_0^2}{2}x^2-\frac{m\alpha}{3}x^3-\frac{m\beta}{4}x^4. \tag{28.8}$$

これに対応する運動方程式は

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=-\alpha x^2-\beta x^3. \tag{28.9}$$

その解を逐次近似級数の形におく：

$$x=x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)}.$$

さらに，

$$x^{(1)}=a\cos\omega t \tag{28.10}$$

で，ここに入ってくる振動数は正確な値ωで，それ自身 $\omega=\omega_0+\omega^{(1)}+\omega^{(2)}+\cdots$ という級数として求められる（$x^{(1)}$ の位相の初期値は，時間の原点を適当にえらぶことによっていつでもゼロにすることができる）．しかし，このとき(28.9)の形の運動方程式はまったく適当なものとはいえない．というのは，それに(28.10）を代入しても，等式の左辺はゼロにならないからである．したがって，まえもって方程式をそれと同等な

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x}+\omega_0^2x=-\alpha x^2-\beta x^3-\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\ddot{x} \tag{28.11}$$

という形に書きなおしておく．

ここで $x=x^{(1)}+x^{(2)}$，$\omega=\omega_0+\omega^{(1)}$ とおき，2次以上の小さな項をはぶくと，$x^{(2)}$ に対する方程式

$$\begin{aligned}\ddot{x}^{(2)}+\omega_0^2x^{(2)}&=-\alpha a^2\cos^2\omega t+2\omega_0\omega^{(1)}a\cos\omega t\\&=-\frac{\alpha a^2}{2}-\frac{\alpha a^2}{2}\cos 2\omega t+2\omega_0\omega^{(1)}a\cos\omega t\end{aligned}$$

が得られる．この右辺に共鳴項が現われない条件は，この節のはじめに述べた2次近似を見いだす方法にしたがって，$\omega^{(1)}=0$ という簡単なものになる．そうすると，非同次線形方程式の通常の解法にしたがって

$$x^{(2)}=-\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2}+\frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}\cos 2\omega t \tag{28.12}$$

が得られる．

さらに，(28.11）で $x=x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)},\omega=\omega_0+\omega^{(2)}$ とおくと，$x^{(3)}$ に対する方程式

$$\ddot{x}^{(3)}+\omega_0^2x^{(3)}=-2\alpha x^{(1)}x^{(2)}-\beta x^{(1)3}+2\omega_0\omega^{(2)}x^{(1)}$$

が得られる．あるいは，この右辺に（28.10）と（28.12）を代入して簡単な変形をおこなうと

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -a^3\left[\frac{\beta}{4} + \frac{\alpha^2}{6\omega_0^2}\right]\cos 3\omega t$$
$$+ a\left[2\omega_0\omega^{(2)} + \frac{5a^2\alpha^2}{6\omega_0^2} - \frac{3}{4}a^2\beta\right]\cos\omega t.$$

共鳴因子 $\cos\omega t$ の係数をゼロとおくと，基本振動数への補正が見いだされる．それは振幅の2乗に比例する：

$$\omega^{(2)} = \left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}\right)a^2. \qquad (28.13)$$

3次の結合振動は

$$x^{(3)} = \frac{a^2}{16\omega_0^2}\left(\frac{a^2}{3\omega_0^2} + \frac{\beta}{2}\right)\cos 3\omega t \qquad (28.14)$$

となる．

§29. 非線形振動における共鳴

系の強制振動で非調和項を考慮に入れると，共鳴現象に本質的に新しい特徴が見られるようになる．

方程式（28.9）の右辺に周期的な力（振動数 γ）を付け加えて，

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\cos\gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3 \qquad (29.1)$$

を得る．ここには，減衰率 λ（以下では小さいものと仮定する）の摩擦も書いてある．厳密にいうと，自由振動の方程式で非線形項を考慮するときには，強制力が変位に依存するかもしれないことに応じて，力の振幅についても高次の項を考えに入れなければならない．われわれがそのような項を書かないのは，ただ簡単のためにすぎない．そうしても，現象の質的な特徴は変わらない．

$$\gamma = \omega_0 + \varepsilon$$

とおく（ε は小）．すなわち，通常の共鳴の近くで考える．運動の特徴を明らかにするのに，つぎのように考えれば，直接方程式（29.1）を解かずにすませることができる．

線形振動の近似では，強制振動の振幅 b と外力の振幅 f および振動数 γ との関係は，共鳴の近くでは（26.7）式によって与えられる．それをつぎの形に書きなおす：

$$b^2(\varepsilon^2+\lambda^2)=\frac{f^2}{4m^2\omega_0^2}. \tag{29.2}$$

非線形のために，その固有振動数は振幅に依存するようになる．それを

$$\omega_0+\kappa b^2 \tag{29.3}$$

と書こう．ここに定数κは，非調和項の係数によってきまる((28.13)を見よ)．この変化に応じて，(29.2)式のなかで（より正確にいえば，小さい差 $\gamma-\omega_0$ のなかで）ω_0 は $\omega_0+\kappa b^2$ に変わる．

$\varepsilon=\gamma-\omega_0$ という記号はそのままにしておくと，結局

$$b^2[(\varepsilon-\kappa b^2)^2+\lambda^2]=\frac{f^2}{4m^2\omega_0^2} \tag{29.4}$$

あるいは，

$$\varepsilon=\kappa b^2\pm\sqrt{\left(\frac{f}{2m\omega_0 b}\right)^2-\lambda^2}$$

という式が得られる．

b^2について3次の方程式 (29.4) を解くと，その実根によって強制振動の振幅が与えられる．外力の振幅fが与えられたとき，この振幅が外力の振動数にどのように依存するかをしらべよう．

f の値が十分小さいときは b も小さく，したがって，(29.4) で b の2次より高い項をはぶくことができて，$b(\varepsilon)$ の表現は (29.2) にもどる．これは $\varepsilon=0$ の点に極大をもつ対称な曲線を表わす（図 32a)．fが増大するにつれて曲線は変形するが，その際極大を1つもつというはじめの特徴は保たれる（図32b)．極大はεの正の側へ移る（$\kappa>0$ のとき)．このとき，方程式 (29.4) の3つの根のうち実根はただ1個である．

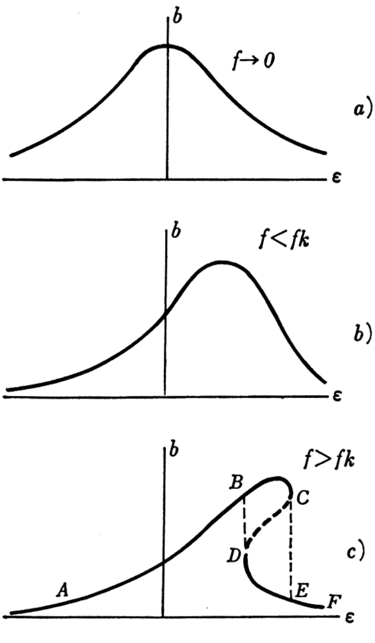


図 32

しかしながら，一定の値 $f=f_k$（この値はあとで求める）からさきは曲線の性質が変化する．$f>f_k$ の値のおのおのに対して，方程式 (29.4) が実根を3

つもつような領域がきまる. それは図 32c の曲線で $BCDE$ の領域に対応している.

この領域の限界は, 点 D および C における条件 $\dfrac{db}{d\varepsilon}=\infty$ によってきまる. (29.4) 式を ε で微分すると

$$\frac{db}{d\varepsilon}=\frac{-\varepsilon b+\kappa b^3}{\varepsilon^2+\lambda^2-4\kappa\varepsilon b^2+3\kappa^2 b^4}$$

が得られる. したがって, 点 D および C の位置は, 方程式

$$\varepsilon^2-4\kappa b^2\varepsilon+3\kappa^2 b^4+\lambda^2=0 \tag{29.5}$$

と (29.4) との共通の解によってきまる. それに対応する ε の値はともに正である. 振幅の最大値は $\dfrac{db}{d\varepsilon}=0$ の点にある. この点では $\varepsilon=\kappa b^2$ で, (29.4) から

$$b_{\max}=\frac{f}{2m\omega_0\lambda} \tag{29.6}$$

となる. この値は, (29.2) という関係で与えられる極大値に一致する.

方程式 (29.4) の3つの実根のうちまんなかの根 (すなわち, 図32c で点線で表わした曲線部分 CD) は, 不安定な振動に対応することを示すことができる (その詳細にはここでは立ち入らない)[1]. そのような状態にある系は, どんなに弱い作用をうけても, いちばん大きい根またはいちばん小さい根に対応する振動状態 (すなわち BC または DE の部分) に移ってゆく. したがって, 分枝 ABC と DEF だけが系の実際の振動に対応する. このときの注目すべき特徴は, 2つのことなった振幅を許すような振動数の領域が存在することである. すなわち, 外力の振動数が増大してゆくと, 強制振動の振幅は曲線 ABC にそって増大する. 点 C に達すると, 振幅の《崩壊》がおこって, 振動はとつぜん点 E に対応する値にまでおちる. そのあとは (振動数がさらに増大するとき), 曲線 EF にそって変化する. そのとき振動数が減少に転ずると, 強制振動の振幅は曲線 FD にそって変化し, 点 D で飛躍して B にまで増大してから, BA にそって減少してゆく.

f_k の値を計算するために, これは, b^2 について2次の方程式 (29.5) の2つの根が一致するような f の値であることに注目する. $f=f_k$ のとき, 曲線分 CD は1つの変曲点に収縮してしまう. 2次方程式 (29.5) の判別式をゼロに等しい

1) その証明は, たとえばエヌ・エヌ・ボゴリューボフとユ・ア・ミトロポルスキーの書物《非線形振動の理論における漸近的方法》, 物理学・数学図書出版所, 1958 に与えられている.

とおいて，$\varepsilon^2=3\lambda^2$ を得る．これに対応する方程式の根は $\kappa b^2=2\varepsilon/3$ である．これらの b と ε の値を（29.4）に代入して，

$$f_k^2=\frac{32m^2\omega_0^2\lambda^3}{3\sqrt{3}\,|\kappa|} \tag{29.7}$$

が見いだされる．

振動の非線形性は，振動数 $\gamma\approx\omega_0$ における共鳴の性格を変えるほかに，新しい共鳴を生じさせる．この共鳴では，ω_0 とはっきりことなる振動数をもつ外力によって，ω_0 に近い振動数をもつ振動が励起される．

外力の振動数を $\gamma\approx\omega_0/2$ とする．すなわち，

$$\gamma=\frac{\omega_0}{2}+\varepsilon.$$

第1（線形）近似では，この力によって，力と同じ振動数をもち，振幅も力の振幅に比例するような系の振動がひきおこされる：

$$x^{(1)}=\frac{4f}{3m\omega_0^2}\cos\left(\frac{\omega_0}{2}+\varepsilon\right)t$$

（(22.4）式により）．しかし，第2近似にすすんで非線形項を考慮に入れると，この振動は運動方程式（29.1）の右辺に振動数 $2\gamma\approx\omega_0$ の項をもたらす．すなわち，$x^{(1)}$ を方程式

$$\ddot{x}^{(2)}+2\lambda\dot{x}^{(2)}+\omega_0^2x^{(2)}+\alpha x^{(2)2}+\beta x^{(2)3}=-\alpha x^{(1)2}$$

に代入し，右辺で倍角の余弦の公式を使って共鳴項だけを残すと，

$$\ddot{x}^{(2)}+2\lambda\dot{x}^{(2)}+\omega_0^2x^{(2)}+\alpha x^{(2)2}+\beta x^{(2)3}=-\frac{8\alpha f^2}{9m^2\omega_0^4}\cos(\omega_0+2\varepsilon)t \tag{29.8}$$

が得られる．この方程式が方程式（29.1）とことなるのは，力の振幅 f の代わりに，その2乗 f^2 に比例する表現が入っていることだけである．このことは，はじめに考察した振動数 $\gamma\approx\omega_0$ の共鳴と同じ性格をもち，ただ強さが小さい共鳴が生ずることを意味する．関数関係 $b(\varepsilon)$ は，(29.4）式で f を $-8\alpha f^2/9m\omega_0^4$ に（そして ε を 2ε に）おきかえることによって得られる：

$$b^2[(2\varepsilon-\kappa b^2)^2+\lambda^2]=\frac{16\alpha^2f^4}{81m^4\omega_0^{10}}. \tag{29.9}$$

こんどは外力の振動数を

$$\gamma=2\omega_0+\varepsilon$$

とおこう．第1近似では，

$$x^{(1)} = -\frac{f}{3m\omega_0^2}\cos(2\omega_0+\varepsilon)t$$

である．$x = x^{(1)} + x^{(2)}$ を方程式（29.1）に代入しても，さきほどの場合のように共鳴をひきおこす特徴をもつ外力の項が現われるということはない．けれども，積 $x^{(1)}x^{(2)}$ に比例する３次の項から，パラメター型の共鳴が生ずる．すべての非線形項のうちそのような項だけ残すと，$x^{(2)}$ に対する方程式

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -2\alpha x^{(1)}x^{(2)},$$

あるいは

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2\left[1 - \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^4}\cos(2\omega_0+\varepsilon)t\right]x^{(2)} = 0 \qquad (29.10)$$

が得られる．これは（27.8）と同じ型の方程式であって（ただし，摩擦項がついている），すでに知っているように，振動数の一定の区間で不安定な振動に導く．

しかしながら，その結果生ずる振動の振幅を求めるには，この方程式では十分でない．最終的な振幅の確立は非線形性の効果に結びついている．そして，その効果を考慮に入れるには，運動方程式に $x^{(2)}$ についての非線形の項も残すことが必要である：

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^2}\cos(2\omega_0+\varepsilon)t\cdot x^{(2)}. \qquad (29.11)$$

つぎのような事情に着目すると，この問題の取り扱いは非常に簡単化される．方程式（29.11）の右辺で

$$x^{(2)} = b\cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \delta\right]$$

とおき（ただし，b は求める共鳴振動の振幅，δ は位相の一定のすすみであるが，以下の議論には重要でない），２つの周期的な因数の積を２つの余弦の和で表わすと，通常の（系の固有振動数 ω_0 に関する）共鳴の性格をもった

$$\frac{\alpha f b}{3m\omega_0^2}\cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t - \delta\right]$$

という項が得られる．したがって，問題はふたたび，この節のはじめに考察した非線形的な系における通常の共鳴の問題にもどる．ただこんどは，外力の振幅の代わりに $\alpha f b/3\omega_0^2$ という量がくるというちがいがある（また，ε が $\varepsilon/2$ に変わる）．（29.4）にこれだけの変更を加えて，

$$b^2\left[\left(\frac{\varepsilon}{2}-\kappa b^2\right)^2+\lambda^2\right]=\frac{\alpha^2 f^2 b^2}{36m^2\omega_0^6}$$

を得る．この式を b について解くと，可能な振幅の値としてつぎのものが見いだされる：

$$b=0, \qquad (29.12)$$

$$b^2=\frac{1}{\kappa}\left[\frac{\varepsilon}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6m\omega_0^3}\right)^2-\lambda^2}\right], \qquad (29.13)$$

$$b^2=\frac{1}{\kappa}\left[\frac{\varepsilon}{2}-\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6m\omega_0^3}\right)^2-\lambda^2}\right]. \qquad (29.14)$$

これから得られる b と ε との関係を図33に示す（$\kappa>0$ に対して．$\kappa<0$ のときは，曲線の向きが反対になる）．点 B および C は

$$\varepsilon=\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{3m\omega_0^3}\right)^2-4\lambda^2}$$

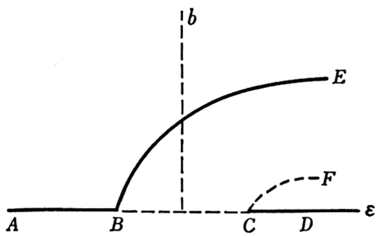


図 33

という値に対応している．点 B より左では，$b=0$ という値だけが可能である．すなわち，共鳴はなく，振動数 $\approx\omega_0$ の振動は励起されない．B と C のあいだの区間では，$b=0$（図33の線分 BC）と (29.13)（分枝 BE）と2つの根をもつ．最後に，点 C より右では (29.12)——(29.14) の3つの根がすべて存在する．しかし，これらの値のすべてが安定な振動に対応するわけではない．$b=0$ という値は線分 BC 上では不安定である[1]．また，根 (29.14)（他の2つの根の中間にある）に対応する振動はつねに不安定である．図33では，不安定な b の値を点線で表わしてある．

例として，はじめ《休止していた》[2] 系が，外力の振動数がだんだん減少する際にどのようにふるまうかを調べよう．点 C に達するまでは，$b=0$ のままであ

1）この区間はちょうどパラメター共鳴の領域 (27.12) に一致する．さらに (29.10) と (27.8) の比較から，$|h|=2\alpha f/3m\omega_0^3$．ここで考察した現象が存在しうるための条件

$$\left|\frac{2\alpha f}{3m\omega_0^3}\right|>4\lambda$$

は，不等式 $h>h_k$ に相当する．

2）ここでは，共鳴振動だけを念頭においていることに注意しなければならない．したがって，共鳴振動がないということは，文字どおりに系が静止していることを意味するのではない．それは振動数 γ の弱い強制振動をおこなっているであろう．

るが，それからこの状態は《崩壊》して，分枝 EB に移る．さらに ε が減少すると，振動の振幅も減少していって点 B でゼロになる．それから逆に振動数が増大すると，振動の振幅は曲線 BE にそって増大する[1]．

上に考察した共鳴は，非線形振動系に生ずるもののうち基本的な場合である．さらに近似を高めると，また別の振動数でも共鳴が現われる．厳密にいうと，共鳴は $n\gamma + m\omega_0 = \omega_0$ （n, m は整数） となるようなすべての振動数 γ において生ずる．あるいは，p, q を別の整数として，$\gamma = p\omega_0/q$ であるようなすべての γ といってもよい．けれども，近似度が高まると，共鳴現象の強さが（そしてまた共鳴の生ずる振動数領域の幅が）急激に減少するから，実際に観測しうる共鳴は，振動数 $\gamma \approx p\omega_0/q$ において p および q の値が大きくないものだけである．

問　題

振動数 $\gamma \approx 3\omega_0$ における共鳴に対して，関数 $b(\varepsilon)$ を求めよ．

解　第1近似では，

$$x^{(1)} = -\frac{f}{8m\omega_0^2}\cos(3\omega_0 + \varepsilon)t.$$

第2近似（$x^{(2)}$）に対しては，(29.1) から

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -3\beta x^{(1)}x^{(2)2}$$

という方程式が得られる．ただし，この式の右辺には，考えている共鳴をもたらす項だけを書いた．その項で $x^{(2)} = b\cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)t + \delta\right]$ とおき，3個の余弦の積から共鳴項を取り出すと，方程式の右辺の表現として

$$\frac{3\beta b^2 f}{32m\omega_0^2}\cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)t - 2\delta\right]$$

を得る．これから明らかに，b の ε に対する依存関係は，(29.4) 式で f を $3\beta b^2 f/32\omega_0^2$ に，ε を $\varepsilon/3$ におきかえれば得られる：

$$b^2\left[\left(\frac{\varepsilon}{3} - \kappa b^2\right)^2 + \lambda^2\right] = \frac{9\beta^2 f^2}{2^{12}m^2\omega_0^6}b^4 \equiv Ab^4.$$

この方程式の根は

$$b = 0, \qquad b^2 = \frac{\varepsilon}{3\kappa} + \frac{A}{2\kappa^2} \pm \frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{\varepsilon A}{3\kappa} + \frac{A^2}{4\kappa^2} - \lambda^2}.$$

---

1) しかしながら，導かれた公式は，振幅 b（および ε）が十分小さいあいだしか正しくないということには注意しなければならない，実際には，曲線 BE と CF はもっと先では，ある点で合流してそこでおわってしまうのである．この点に達すると，振動的な状態は《崩壊して》，$b=0$ の状態になる．

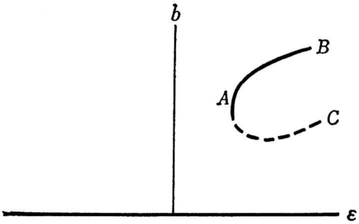


図 34

図34に b の ε に対する依存関係をグラフ表示した（$\kappa>0$ において）．安定状態に対応するのは，$b=0$（横軸）と分枝 AB だけである．点Aに対応する値は

$$\varepsilon_k=\frac{3(4\kappa^2\lambda^2-A^2)}{4\kappa A},\qquad b_k^2=\frac{4\kappa^2\lambda^2+A^2}{4\kappa^2 A}$$

である．振動がおこなわれるのは $\varepsilon>\varepsilon_k$ で，そのうえ $b>b_k$ の領域だけである．$b=0$ の状態はつねに安定であるから，振動が励起されるためには，最初の《一撃》がどうしても必要である．

上に得た式は，小さな ε に対してのみ正しい．このとき，力の振幅が条件 $\lambda^2/\omega_0\ll A/k\ll\omega_0$ を満足するならば，ε の小さいことは λ の小さいことを保障する．

§ 30. 急激に振動する場における運動

不変な場Uと同時に，時間的に大きな振動数 ω で変化する力

$$f=f_1\cos\omega t+f_2\sin\omega t \tag{30.1}$$

の作用もうけている粒子の運動を考察しよう（ここに，f_1, f_2 は座標だけの関数とする）．ここで《大きい》振動数とは，粒子が場 U だけしかないときにおこなう運動の周期の大きさの程度を T としたとき，$\omega\gg 1/T$ という条件をみたすような振動数のことと理解する．力fの大きさ自体については，場Uのなかに働く力にくらべて小さいという仮定をおかない．しかし，この力によってひきおこされる粒子の振動的な変位（それを以下では ξ と書く）は小さいと仮定する．

計算を簡単にするために，まず，ただ1つの空間座標 x だけに依存するような場における1次元運動を考察しよう．そのときの粒子の運動方程式は

$$m\ddot{x}=-\frac{\partial U}{\partial x}+f \tag{30.2}$$

である[1]．

粒子に作用をおよぼす場の性質からあらかじめ明らかなように，粒子の運動はなめらかな軌跡にそった変位に小さな振動（その振動数は ω）が重ね合わされたものである．このことに対応して，関数 $x(t)$ は

---

1) 座標 x はかならずしもデカルト座標ではなくてもよい．それに応じて，係数 m はかならずしも粒子の質量ではなく，また定数とも限らない．(30.2) では m が定数と仮定してあるが，しかし，そのことは最後の結果には反映しない（以下を見よ）．

$$x(t) = X(t) + \xi(t) \tag{30.3}$$

という和の形に書ける．ここに $\xi(t)$ は，上に述べた小さな振動を表わす．

関数 $\xi(t)$ を周期 $2\pi/\omega$ にわたって時間的に平均すればゼロになる．同じ時間のあいだに関数 $X(t)$ はわずかしか変化しない．そこで，そのような時間平均を文字の上の横線で示すことにすれば，$\bar{x} = X(t)$ である．すなわち，関数 $X(t)$ は，急激な振動をならしてしまった《なめらかな》粒子の運動を記述する．つぎにこの関数を決定する方程式を導こう[1]．

(30.3) を (30.2) に代入し，ξ のベキに展開して，その1次の項までをとる：

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{dU}{dX} - \xi\frac{d^2U}{dX^2} + f(X, t) + \xi\frac{\partial f}{\partial X}. \tag{30.4}$$

この方程式にはことなった性格の項，すなわち，振動的な項と《なめらかな》項とが含まれている．それらは明らかに，2つのグループのおのおので，別々に等式を形づくっているはずである．振動的な項に対しては，

$$m\ddot{\xi} = f(X, t) \tag{30.5}$$

と書けば十分である．残りの項には微小な ξ がかかっていて，いま書いたものにくらべて小さい（導関数 $\ddot{\xi}$ についていえば，それは大きな量 ω^2 に比例するから小さくない）．(30.1) の関数 f をとって (30.5) 式を積分すると（その際 X は定数とみなす），

$$\xi = -\frac{f}{m\omega^2} \tag{30.6}$$

を得る．

つぎに，方程式 (30.4) を時間的に平均する（上にいった意味で）．f および ξ について1次の量の平均値はゼロになるから，関数 $X(t)$ だけしか含まない方程式

$$m\ddot{X} = -\frac{dU}{dX} + \overline{\xi\frac{\partial f}{\partial X}} = -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{m\omega^2}\overline{f\frac{\partial f}{\partial X}}$$

が得られる．これは結局

$$m\ddot{X} = -\frac{dU_{有効}}{dX} \tag{30.7}$$

という形に書きなおされる．ここに $U_{有効}$ は

1) 以下に述べる方法の着想はペ・エリ・カピツァ (1951年) による．

$$U_{有効} = U + \frac{1}{2m\omega^2}\overline{f^2} = U + \frac{1}{4m\omega^2}(f_1^2 + f_2^2) \tag{30.8}$$

によって定義される《有効ポテンシャル・エネルギー》である[1]．この表式を(30.6)とくらべてみれば容易にわかるように，(場Uに対して)付加された項が表わすのは，振動運動の平均の運動エネルギーにほかならない：

$$U_{有効} = U + \frac{m}{2}\overline{\dot{\xi}^2}. \tag{30.9}$$

このように，振動についてならしてしまうと，粒子の運動はちょうど，不変な場Uのほかになお，変動する場の振幅の2乗に依存する付加的な不変な場が働いているかのようにおこなわれるのである．

一般座標 q_i によって記述される，任意の数の自由度をもつ系にまで上に得た結果を拡張することは容易にできる．有効ポテンシャル・エネルギーとして((30.8)の代わりに)，表式

$$U_{有効} = U + \frac{1}{2\omega^2}\sum_{i,k} a_{ik}^{-1}\overline{f_i f_k} = U + \sum_{i,k}\frac{a_{ik}}{2}\overline{\dot{\xi}_i\dot{\xi}_k} \tag{30.10}$$

が得られる．ここで a_{ik}^{-1} という量は(一般に座標の関数)，系の運動エネルギーの係数 a_{ik} の行列((5.5)を見よ)の逆行列の要素である．

問 題

1. 支点が鉛直方向に大きな振動数 $\gamma(\gamma \gg \sqrt{g/l})$ で振動している振子の安定なつり合いの位置を求めよ．

解 §5の問題3c で得たラグランジアンから，この場合の変動する力は

$$f = -mla\gamma^2 \cos\gamma t \sin\varphi$$

であることが明らかである(量xとして角度φをとる)．したがって，《有効ポテンシャル・エネルギー》は

$$U_{有効} = mgl\left(-\cos\varphi + \frac{a^2\gamma^2}{4gl}\sin^2\varphi\right)$$

である．安定なつり合いの位置は，この関数を極小にするような点である．鉛直下向きの方向($\varphi = 0$)はつねに安定である．しかし

$$a^2\gamma^2 > 2gl$$

という条件がみたされるときには，鉛直上向きの方向($\varphi = \pi$)も安定である．

---

1) 計算はいくらか長くなるが，mがxに依存する場合にも公式(30.7)，(30.8)は正しいということが容易に確かめられる．

2. 支点が水平方向に振動するような振子について同じ問題を解け．

解 §5の問題 3b で得たラグランジアンによって $f = mla\gamma^2 \cos\gamma t \cos\varphi$. したがって

$$U_{\text{有効}} = mgl\left[-\cos\varphi + \frac{a^2\gamma^2}{4gl}\cos^2\varphi\right]$$

である．$a^2\gamma^2 < 2gl$ ならば，安定な位置は $\varphi = 0$ である．$a^2\gamma^2 > 2gl$ ならば，安定なつり合いを与えるのは，

$$\cos\varphi = \frac{2gl}{a^2\gamma^2}$$

という位置である．

第6章 剛体の運動

§ 31. 角速度

力学でいう剛体は，相互間の距離が不変であるような質点の集りであると定義することができる．もちろん，実際に自然のなかに存在する系は，この条件を近似的にみたすにすぎない．しかし，大多数の固体は普通の条件のもとでは，その形や大きさをごくわずかしか変えないから，固体の運動の法則を論ずる際には，この変化をまったく捨象してよい．

以下でしばしば，剛体を離散的な質点の集りとみなすことがあるが，そのことによって，式の導出がいくらか簡単化される．しかしこのことは，実際には，剛体は力学において，ふつうその内部構造をまったく考慮せずに連続的な物体とみなすことができるという事情とすこしも矛盾するものでない．離散的な点についての和を含む式から連続体に対する式へ移るには，質点の質量を体積要素 dV 内の質量 ρdV におきかえ（ρ は密度），物体の全体積にわたって積分するだけでよい．

剛体の運動を記述するために2つの座標系を導入する．すなわち，《静止座標系》，すなわち慣性座標系 XYZ と，剛体に固く結びついており，それとすべての運動をともにすると仮定される運動座標系 $x_1=x, x_2=y, x_3=z$ とである．運動系の原点は剛体の慣性中心に一致させるのが便利である．

静止座標系に対する剛体の配置は，運動座標系の配置を与えれば完全にきまる．運動系Oの原点の位置を動径ベクトル $\boldsymbol{R}$ で表わす（図35）．この系の軸の静止系に対する方向は，独立な3つの角度によってきまるから，ベクトル $\boldsymbol{R}$ の3つの成分とあわせて，全部で6個の座標をもつことになる．したがって，おのおのの剛体は，6個の自由度をもつ力学系である．

剛体の任意の無限小移動を考えよう．それは，2つの部分からなるとみなすことができる．第1は，無限小の平行移動であって，それによって剛体の慣性中心は，運動座標系の軸の方向を不変にしたまま，2点間を移動する．第2は，慣性

中心のまわりの無限小回転で，その結果，剛体は最終的な配置へ到達する．

運動座標系における剛体の任意の点Pの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$, 同じ点の静止系における位置ベクトルを$\boldsymbol{\mathfrak{r}}$で表わそう．すると，点$P$の無限小の変位$d\boldsymbol{\mathfrak{r}}$は，慣性中心とともにおこなう変位$d\boldsymbol{R}$と，無限小角$d\boldsymbol{\varphi}$の回転によって生ずる慣性中心に対する変位$[d\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{r}]$とから合成される（(9.1) を見よ)：

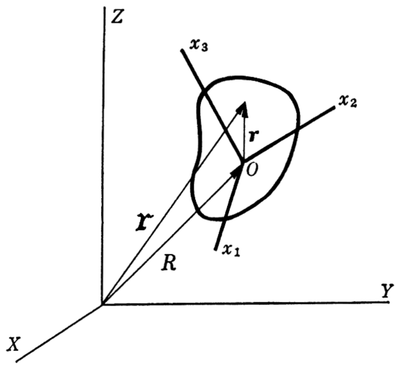


図　35

$$d\boldsymbol{\mathfrak{r}} = d\boldsymbol{R} + [d\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{r}].$$

この等式を，考えている運動の生ずるあいだに経過した時間dtで割り，速度

$$\frac{d\boldsymbol{\mathfrak{r}}}{dt} = \boldsymbol{v},\ \ \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \boldsymbol{V},\ \ \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \quad (31.1)$$

を導入すると，これらのあいだにつぎの関係が得られる：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + [\boldsymbol{\Omega r}]. \quad (31.2)$$

ベクトル$\boldsymbol{V}$は，剛体の慣性中心の速度である．それゆえ，これは剛体の**並進運動**の速度とよばれる．ベクトル$\boldsymbol{\Omega}$は，剛体の回転の**角速度**とよばれる．その方向は（$d\boldsymbol{\varphi}$の方向と同じく）回転軸の方向に一致する．このように，剛体の任意の点の（静止座標系に対する）速度$\boldsymbol{v}$は，剛体の並進運動の速度およびその回転の角速度によって表わすことができる．

公式 (31.2) を導くのに，剛体の慣性中心であるという座標原点の特別の性質はいっさい利用していないことを強調しなければならない．このように原点をえらんだことの利点は，あとになって剛体の運動エネルギーを計算するときに明らかになるであろう．

いま，剛体に固く結びついた座標系の原点を，慣性中心Oでなく，点Oから距離$\boldsymbol{a}$だけ離れた点O'にとったと仮定しよう．この座標系の原点の並進速度を$\boldsymbol{V}'$, その系の回転の角速度を$\boldsymbol{\Omega}'$で表わす．

ふたたび剛体の任意の点Pを考え，原点O'に関するそれの位置ベクトルを$\boldsymbol{r}'$で表わそう．すると，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{a}$ となり，これを (31.2) に代入すると，

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + [\boldsymbol{\Omega a}] + [\boldsymbol{\Omega r}']$$

が得られる．他方，$\boldsymbol{V}'$および$\boldsymbol{\Omega}'$の定義から，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}' + [\boldsymbol{\Omega}'\boldsymbol{r}']$ でなければなら

ない．したがって，結局

$$V' = V + [\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{a}], \qquad \boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Omega}. \tag{31.3}$$

この2つの等式のうち，後者はきわめて重要である．剛体に固定された座標系の各瞬間における回転の角速度は，その座標系のいかんにまったく依存しないことがわかる．そのような座標系はすべて，どの瞬間をとっても，互いに平行な軸のまわりに絶対値の等しい角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で回転するのである．このことからも，$\boldsymbol{\Omega}$ を剛体の回転それ自体の角速度とよぶことに道理がある．並進運動の速度には，そのような《絶対的な》性質はない．

(31.3) の第1の式から，ある座標原点 O の選び方において（与えられた瞬間に）$\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{\Omega}$ とが互いに垂直ならば，他の任意の点 O' に原点をとったときにもそれら（$\boldsymbol{V}'$ と $\boldsymbol{\Omega}'$）は互いに垂直になることがわかる．その場合には，(31.2) 式から明らかなように，剛体のすべての点の速度 $\boldsymbol{v}$ は同一平面——$\boldsymbol{\Omega}$ に垂直な平面のなかにある．そのようなときには，速度 $\boldsymbol{V}'$がゼロに等しいような原点 O' を選んで[1]，（与えられた瞬間における）剛体の運動が O' を通る軸のまわりの純粋の回転として表わせるようにすることができる．この軸を，剛体の**瞬間的回転軸**となづける[2]．

こんごわれわれはつねに，運動座標系の原点は剛体の慣性中心に一致し，したがって，剛体の回転軸も慣性中心を通るものと仮定する．一般的にいえば，剛体が運動するとき，$\boldsymbol{\Omega}$ の絶対値とともに回転軸の方向も変化する．

§ 32. 慣性テンソル

剛体の運動エネルギーを計算するために，剛体を質点からなる離散的な系とみなし

$$T = \sum \frac{mv^2}{2}$$

とおく．和は，剛体をかたちづくるすべての点にわたってとる．この式を含めて以下では，式を書くのを簡単化するために，これらの点の番号を表わす添字ははぶくことにする．

---

1) もちろん，この原点は剛体外にありうることもある．

2) $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{\Omega}$ の方向が互いに垂直でない一般の場合は，$\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{\Omega}$ とが平行なように，すなわち，（与えられた瞬間の）運動がある軸のまわりの回転とこの軸にそう並進運動との合成であるように，座標の原点をえらぶことができる．

この式に (31.2) を代入して,

$$T = \sum \frac{m}{2}(\boldsymbol{V} + [\boldsymbol{\Omega r}])^2 = \sum\frac{m}{2}V^2 + \sum m\boldsymbol{V}[\boldsymbol{\Omega r}] + \sum\frac{m}{2}[\boldsymbol{\Omega r}]^2$$

を得る. 速度 $\boldsymbol{V}$ および $\boldsymbol{\Omega}$ は, 剛体のすべての点に対して同一である. したがって, 第1項で $V^2/2$ は和記号の外にだすことができ, 和 $\sum m$ は剛体の質量となる. これを μ で表わす. 第2項を書きなおすと,

$$\sum m\boldsymbol{V}[\boldsymbol{\Omega r}] = \sum m\boldsymbol{r}[\boldsymbol{V\Omega}] = [\boldsymbol{V\Omega}]\sum m\boldsymbol{r}.$$

これからつぎのことがわかる. われわれが仮定したように運動座標系の原点を慣性中心にとるならば, $\sum m\boldsymbol{r} = 0$ であるから, 第2項はゼロになる. 最後に, 第3項のベクトル積の平方を開くと,

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\{\Omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\Omega r})^2\} \tag{32.1}$$

という結果が得られる.

このように, 剛体の運動エネルギーは, 2つの項の和の形に表わすことができる. (32.1) の第1項は並進運動のエネルギーであって, 剛体の全質量がその慣性中心に集中しているとした場合の形をしている. 第2項は, 慣性中心を通る軸のまわりの, 角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ の回転運動のエネルギーである. 運動エネルギーをこのように2つの部分に分けることができるのは, 剛体に固定した座標系の原点を剛体の慣性中心に一致させるという条件のもとにおいてのみであることを強調しておく.

回転の運動エネルギーをテンソル記号で, つまりベクトル $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}$ の成分 x_i, Ω_i によって書きあらためよう[1]:

$$\begin{aligned} T_{\text{回転}} &= \frac{1}{2}\sum m\{\Omega_i^2 x_l^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k\} \\ &= \frac{1}{2}\sum m\{\Omega_i\Omega_k\delta_{ik}x_l^2 - \Omega_i\Omega_k x_i x_k\} \\ &= \frac{1}{2}\Omega_i\Omega_k\sum m(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k). \end{aligned}$$

ここで恒等式 $\Omega_i = \delta_{ik}\Omega_k$ を使った. δ_{ik} は単位テンソルである (その成分は,

1) この章では, テンソルの添字を, i, k, l と書き, 1,2,3 の値をとるものとする. そして, つぎのような和の規則によって和の記号をはぶく. すなわち, 2度くりかえされた添字 (いわゆるダミー) は, 1,2,3 という値について和をとる; たとえば, $A_iB_i = \boldsymbol{AB}$, $A_l^2 = A_lA_l = \boldsymbol{A}^2$ 等. ダミー添字の記号は任意のものにとりかえることができることはもちろんである (ただ, 与えられた表示において, テンソルの他の添字を表わす記号に一致してはいけない).

$i=k$ のとき1に等しく，$i \neq k$ のときゼロである).

$$I_{ik}=\sum m(x_l^2\delta_{ik}-x_ix_k) \tag{32.2}$$

というテンソルを導入すると，剛体の運動エネルギーの表式は結局

$$T=\frac{\mu V^2}{2}+\frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k \tag{32.3}$$

となる.

剛体のラグランジアンは，(32.3) からポテンシャル・エネルギーをひいて

$$L=\frac{\mu V^2}{2}+\frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k-U \tag{32.4}$$

である．ポテンシャル・エネルギーは一般に，剛体の位置を定める6つの変数，すなわち慣性中心の3つの座標 X, Y, Z と運動座標軸の静止座標軸に対する位置を定める3つの角度との関数である.

テンソル I_{ik} は，剛体の**慣性モーメント・テンソル**あるいは単に**慣性テンソル**とよばれる．(32.2) の定義から明らかなように，それは対称である.

$$I_{ik}=I_{ki}. \tag{32.5}$$

はっきりさせるために，その成分をつぎの表のようにあからさまな形に書いておく：

$$I_{ik}=\begin{pmatrix}\sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz\\ -\sum myx & \sum m(x^2+z^2) & -\sum myz\\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2)\end{pmatrix}. \tag{32.6}$$

成分 I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} は，それぞれの軸に関する慣性モーメントとよばれることがある.

明らかに，慣性テンソルは加法的である——剛体の慣性モーメントは，それの各部分の慣性モーメントの和に等しい.

物体を連続体とみなせるときは，定義 (32.2) において，和は物体の体積についての積分となる：

$$I_{ik}=\int\rho(x_l^2\delta_{ik}-x_ix_k)dV. \tag{32.7}$$

すべての2階の対称テンソルと同じく，慣性テンソルは，x_1, x_2, x_3 軸の方向を適当にえらぶことによって対角型になおすことができる．そのような方向は**慣性主軸**とよばれる．それに対応するテンソルの成分の値を**主慣性モーメント**とよび，I_1, I_2, I_3 で表わす．軸 x_1, x_2, x_3 をそのようにえらんだとき，回転の運動エ

ネルギーはとくに簡単になる：

$$T_{回転}=\frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2+I_2\Omega_2^2+I_3\Omega_3^2). \tag{32.8}$$

3つの主慣性モーメントのどれをとっても，残りの2つの和より大きいことはありえないことに注意しよう．たとえば，

$$I_1+I_2=\sum m(x_1^2+x_2^2+2x_3^2)\geqq\sum m(x_1^2+x_2^2)=I_3. \tag{32.9}$$

3つの主慣性モーメントがすべてことなるような物体は，**非対称こま**とよばれる．

主慣性モーメントのうち2つが相等しければ（$I_1=I_2\neq I_3$），その剛体は**対称こま**とよばれる．この場合には，平面 x_1x_2 内の主軸の方向は任意にえらぶことができる．

3つの主慣性モーメントがすべて相等しいとき，剛体は**球状こま**とよばれる．この場合は，3つの慣性主軸をすべて任意にえらぶことができる：慣性主軸として，互いに垂直な任意の3つの軸をとることが許される．

剛体がなんらかの対称性をもてば，慣性主軸を見いだすことは非常に容易になる．慣性中心の位置および慣性主軸の方向が同じ対称性をもたねばならないことは明らかだからである．

たとえば，物体に対称面があれば，慣性中心はこの平面内になければならない．その平面内には2つの慣性主軸があり，第3の主軸はそれに垂直である．1つの平面内に分布した粒子からなる系は，明らかにそのような場合に属する．このときには，3つの主慣性モーメントのあいだには簡単な関係がある．系の平面を x_1x_2 面にとれば，すべての粒子に対して $x_3=0$ であるから，

$$I_1=\sum mx_2^2,\qquad I_2=\sum mx_1^2,\qquad I_3=\sum m(x_1^2+x_2^2).$$

したがって，

$$I_3=I_1+I_2. \tag{32.10}$$

剛体が任意の次数の対称軸をもてば*)，慣性中心はこの軸の上にある．慣性主軸の1つはこの対称軸に一致し，残りの2つはそれに垂直である．このとき対称軸の次数が2より高ければ，その剛体は対称こまである．実際，そのとき各主軸（対称軸に垂直な）の方向を，ある角度（180° とはことなる）だけ変えることが

*) 物体をある軸のまわりに角度 $2\pi/n$ だけ回転させても形状に変わりがないとき，その軸を n 次の対称軸という〔訳者〕．

できる，すなわち，これらの軸のえらび方は一意的でなくなる．ところが，そのようなことは対称こまの場合にだけ可能である．

特別な場合として，直線にそって分布した粒子の系を考える． この直線を x_3 軸にえらぶと，すべての粒子に対して $x_1=x_2=0$ となり， 2つの主慣性モーメントは一致する．そして第3の主慣性モーメントはゼロである：

$$I_1 = I_2 = \sum m x_3^2, \qquad I_3 = 0. \tag{32.11}$$

そのような系は**回転子**とよばれる．回転子が一般の任意な物体とことなる特徴は，それがつねに，x_1 軸および x_2 軸のまわりの回転に対応する2つの（3つではない）回転の自由度をもつということである．直線のそれ自身のまわりの回転について語ることは，明らかに無意味である．

最後に，慣性テンソルの計算について一言注意しておこう．われわれはこのテンソルを，慣性中心に原点をもつ座標系において計算したのであるが（基本的な式(32.3)が正しいのはそのような定義に対してのみである），しかし，それを計算するのに，まず，他の原点 O' に関して定義される類似のテンソル

$$I'_{ik} = \sum m(x_l'^2 \delta_{ik} - x_i' x_k')$$

を計算したほうが便利なことがある．距離 OO' をベクトル $\boldsymbol{a}$ で与えると， $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{a}$，$x_i = x_i' + a_i$ となる．点 O の定義によって $\sum m\boldsymbol{r} = 0$ であることを考慮すると，

$$I'_{ik} = I_{ik} + \mu(a^2 \delta_{ik} - a_i a_k) \tag{32.12}$$

が見いだされる．この公式を使うと，I'_{ik} を知って容易に求めるテンソル I_{ik} が計算される．

問　題

1. 分子を，互いの距離が不変な粒子の系とみなして， 以下の場合について主慣性モーメントを定めよ：

a) 1本の直線上にならんだ原子からなる分子．

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{\mu} \sum_{a \neq b} m_a m_b l_{ab}^2, \qquad I_3 = 0.$$

ここに，m_a は原子の質量，l_{ab} は原子 a および b のあいだの距離であって，和は， 分子内のすべての原子対についてとる（そして，添字 a, b の対はおのおの1度だけ和のなかに入る）．

2原子分子に対しては，和はただ1つの項になり， まえもって予想できる結果， すなわ

ち，両方の原子の換算質量と原子間の距離の２乗との積が得られる：

$$I_1 = I_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2.$$

b)　２等辺３角形をした３原子分子（図36）.

解　慣性中心は，３角形の高さを与える垂線の上，底辺から $X_2 = m_2 h/\mu$ の距離のところにある．慣性モーメントは

$$I_1 = \frac{2m_1 m_2}{\mu} h^2, \qquad I_2 = \frac{m_1}{2} a^2, \qquad I_3 = I_1 + I_2.$$

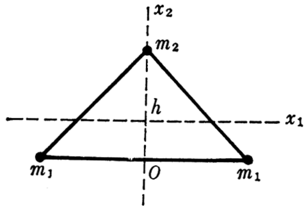


図　36

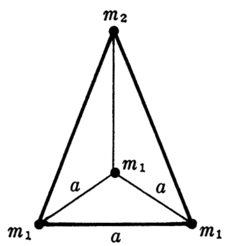


図　37

c)　正３角錐の頂点に位置する原子からなる４原子分子（図37）.

解　慣性中心は，錘体の高さを与える垂線上，底面から $X_3 = m_2 h/\mu$ の距離のところにある．慣性モーメントは，

$$I_1 = I_2 = \frac{3m_1 m_2}{\mu} h^2 + \frac{m_1 a^2}{2}, \qquad I_3 = m_1 a^2$$

となる．$m_1 = m_2, h = a\sqrt{2/3}$ ならば，分子は慣性モーメント

$$I_1 = I_2 = I_3 = m_1 a^2$$

の正４面体となる．

2.　つぎのような一様な物体の主慣性モーメントを求めよ．

a)　長さ l の細い棒．

解　$$I_1 = I_2 = \frac{1}{12}\mu l^2, \qquad I_3 = 0 \text{（棒の太さは無視する）}.$$

b)　半径 R の球．

解　$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}\mu R^2$$

（和 $I_1 + I_2 + I_3 = 2\rho\int r^2 dV$ を計算する）．

c)　半径 R，高さ h の円柱．

解　$$I_1 = I_2 = \frac{\mu}{4}\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right), \qquad I_3 = \frac{\mu}{2} R^2$$

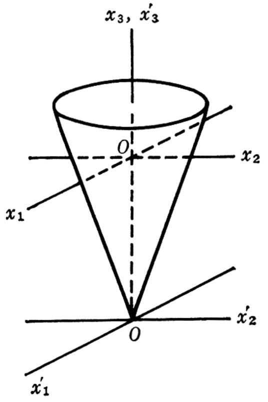


図　38

(円柱の軸を x_3 にとる).

d)　辺の長さが a, b, c の直方体.

解

$$I_1 = \frac{\mu}{12}(b^2 + c^2), \qquad I_2 = \frac{\mu}{12}(c^2 + a^2),$$

$$I_3 = \frac{\mu}{12}(a^2 + b^2)$$

(x_1, x_2, x_3 軸は辺 a, b, c に平行にとる).

e)　高さ h, 底面の半径 R の円錐.

解　まず, 円錐の頂点を原点とする軸に関してテンソル I'_{ik} を計算する (図38). 計算は円柱座標を使うと容易である. その結果は,

$$I'_1 = I'_2 = \frac{3}{5}\mu\left(\frac{R^2}{4} + h^2\right), \qquad I'_3 = \frac{3}{10}\mu R^2.$$

簡単な計算からわかるように, 重心は円錐の軸の上, 頂点から距離 $a = 3h/4$ のところにある. 公式 (32.12) によって, 結局,

$$I_1 = I_2 = I'_1 - \mu a^2 = \frac{3}{20}\mu\left(R^2 + \frac{h^2}{4}\right), \qquad I_3 = I'_3 = \frac{3}{10}\mu R^2.$$

f)　半軸の長さ a, b, c の楕円体.

解　慣性中心は楕円体の中心に一致し, 慣性主軸は楕円体の軸に一致する. 楕円体の体積についての積分は, 楕円体の方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

を単位球の表面の方程式

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

に変える座標変換 $x = a\xi, y = b\eta, z = c\zeta$ によって, 球の体積についての積分に帰着させることができる.

たとえば, x 軸に関する慣性モーメントは,

$$I_1 = \rho\iiint(y^2 + z^2)dx\,dy\,dz$$

$$= \rho abc\iiint(b^2\eta^2 + c^2\zeta^2)d\xi\,d\eta\,d\zeta = abc\frac{1}{2}I'(b^2 + c^2)$$

となる. ただし, I' は単位半径をもつ球の慣性モーメントである. 楕円体の体積は, $4\pi abc/3$ に等しいことに注意すると, 結局慣性モーメントは

$$I_1 = \frac{\mu}{5}(b^2 + c^2), \qquad I_2 = \frac{\mu}{5}(a^2 + c^2), \qquad I_3 = \frac{\mu}{5}(a^2 + b^2)$$

となる.

3. 物理振子（重力場のなかで不動の水平軸のまわりに振れる剛体）の振動数を求めよ.

解 振子の慣性中心から回転軸までの距離を l，慣性主軸と回転軸のあいだの角度を α, β, γ とする．変数として，慣性中心から回転軸におろした垂線と鉛直線とのなす角度 φ をとろう．慣性中心の速さは $V = l\dot{\varphi}$，角速度の各慣性主軸への射影は $\dot{\varphi}\cos\alpha$，$\dot{\varphi}\cos\beta$，$\dot{\varphi}\cos\gamma$ である．角度 φ は小さいとすると，ポテンシャル・エネルギーの形は

$$U = \mu gl(1-\cos\varphi) \approx \frac{1}{2}\mu gl\varphi^2$$

となる．したがって，ラグランジアンは

$$L = \frac{\mu l^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma)\dot{\varphi}^2 - \frac{\mu gl}{2}\varphi^2$$

である．これから，振動数として

$$\omega^2 = \frac{\mu gl}{\mu l^2 + I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma}$$

が得られる．

4. 図39に示すような系の運動エネルギーを見いだせ．OA および AB は，長さ l の細い一様な棒で，点 A で蝶つがいによってつながれている．棒 OA は（図の平面内で）点 O のまわりに回転し，棒 AB の端 B は軸 Ox にそってすべるものとする．

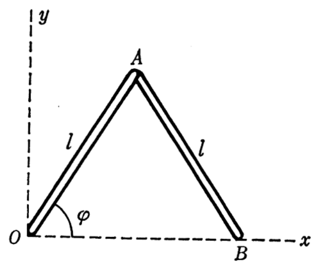


図 39

解 棒 OA の慣性中心（棒の中央にある）の速さは，角度 AOB を φ として，$l\dot{\varphi}/2$ である．したがって，棒 OA の運動エネルギーは

$$T_1 = \frac{\mu l^2}{8}\dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2$$

である（μ は1本の棒の質量）．

棒 AB の慣性中心のデカルト座標は，$X = \frac{3l}{2}\cos\varphi$，$Y = \frac{l}{2}\sin\varphi$．この棒の回転の角速度も $\dot{\varphi}$ であるから，その運動エネルギーは

$$T_2 = \frac{\mu}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{\mu l^2}{8}(1 + 8\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}.$$

系の全運動エネルギーは

$$T = \frac{\mu l^2}{3}(1 + 3\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2$$

である（問題2の a にしたがって，$I = \mu l^2/12$ を代入する）．

5. 平面上をころがる円柱（半径 R）の運動エネルギーを見いだせ．円柱の質量は，慣性主軸の1つが円柱の軸に平行で，それから a だけ離れたところを通るようなぐあいに，

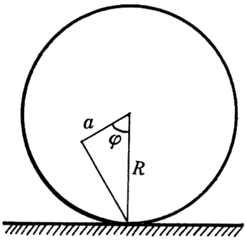


図 40

体積分布しているものとする．この主軸に関する慣性モーメントをIとする．

解 重心から円柱軸におろした垂線と鉛直線とのあいだの角度φを導入する（図40）．各瞬間における円柱の運動は，瞬間的な軸のまわりの真正な回転とみなすことができる．この回転軸は，その瞬間における円柱と不動の平面との接線に一致する．この回転の角速度は$\dot{\varphi}$である（すべての互いに平行な軸のまわりの回転の角速度は同一である）．慣性中心は瞬間的な軸から$\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\varphi}$の距離にあり，したがって，その速さは

$$V=\dot{\varphi}\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\varphi}$$

である．全運動エネルギーは

$$T=\frac{\mu}{2}(a^2+R^2-2aR\cos\varphi)\dot{\varphi}^2+\frac{I}{2}\dot{\varphi}^2$$

となる．

6. 半径Rの円柱の内側の面にそってころがる半径aの一様な円柱の運動エネルギーを見いだせ（図41）．

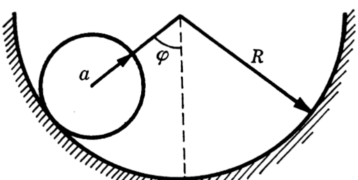


図 41

解 両方の円柱の中心を結ぶ直線と鉛直線とがなす角度φを導入する．ころがる円柱の慣性中心はその軸の上にあり，その速さは，$V=\dot{\varphi}(R-a)$である．角速度は，2つの円柱の接線に一致する瞬間的な軸のまわりの真正な回転の速さとして計算される．それは

$$\Omega=\frac{V}{a}=\dot{\varphi}\frac{R-a}{a}$$

に等しい．円柱の軸のまわりの慣性モーメントをI_3とすると，

$$T=\frac{\mu}{2}(R-a)^2\dot{\varphi}^2+\frac{I_3}{2}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\varphi}^2=\frac{3}{4}\mu(R-a)^2\dot{\varphi}^2$$

（I_3に問題 2c の値を入れる）．

7. 平面上をころがる一様な円錐の運動エネルギーを見いだせ．

解 円錐と平面との接線OAと，この平面上の任意の動かない直線とのあいだの角をθによって表わす（図42）．慣性中心は，円錐の軸の上にあり，その速さは$V=a\cos\alpha\cdot\dot{\theta}$である．ここに，$2\alpha$は円錐の頂角，$a$は頂点から慣性中心までの距離である．回転の角速度は，瞬間的な軸OAのまわりの真正の回転の速さとして計算される：

$$\Omega = \frac{V}{a\sin\alpha} = \dot\theta\cot\alpha.$$

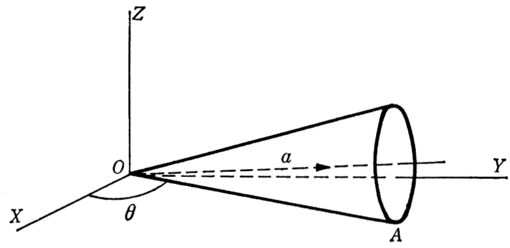


図 42

慣性主軸の1つ（x_3 軸）は円錐の軸に一致するが，残りの慣性主軸（x_2 軸）としては，円錐軸および直線に垂直な直線 OA をえらぶ．すると，ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$（OA に平行な方向をもつ）の慣性主軸への射影は，$\Omega\sin\alpha$, $0, \Omega\cos\alpha$ である．したがって，求める運動エネルギーとして

$$T = \frac{\mu a^2}{2}\cos^2\alpha\cdot\dot\theta^2 + \frac{I_1}{2}\cos^2\alpha\cdot\dot\theta^2 + \frac{I_3}{2}\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}\dot\theta^2$$

$$= \frac{3\mu h^2}{40}\dot\theta^2(1+5\cos^2\alpha)$$

が得られる（h は円錐の高さ，I_1, I_2, a には問題 2e の値を入れる）．

8. 一様な円錐があって，その底面の円周は一つの平面上をころがり，頂点は，平面の上方，底面の半径に等しい高さの点に静止して保持される（したがって，円錐の軸は平面に平行である）．この円錐の運動エネルギーを求めよ．

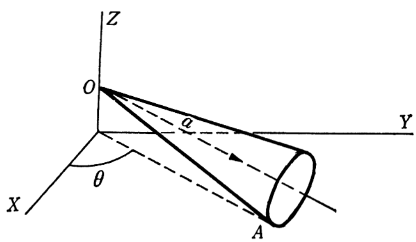


図 43

解 平面上のある定まった方向と円錐の軸とのあいだの角度 θ を導入する（図43）．すると，慣性中心の速さは $V = a\dot\theta$ である（記号は問題 7 と同じ）．瞬間的な回転軸は，円錐と平面との接点を通る円錐の母線 OA である．慣性中心はこの軸から $a\sin\alpha$ の距離のところにあるから，

$$\Omega = \frac{V}{a\sin\alpha} = \frac{\dot\theta}{\sin\alpha}.$$

ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ の慣性主軸（x_2 軸を，円錐軸および直線 OA に垂直にえらぶ）への射影は，$\Omega\sin\alpha = \dot\theta$, 0, $\Omega\cos\alpha = \dot\theta\cot\alpha$ である．したがって，運動エネルギーは，

$$T = \frac{\mu a^2}{2}\dot\theta^2 + \frac{I_1}{2}\dot\theta^2 + \frac{I_3}{2}\dot\theta^2\cot^2\alpha = \frac{3\mu h^2}{40}\dot\theta^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}+5\right).$$

9. 一様な 3 軸楕円体が自分の軸の 1 つ（図 44 の AB）のまわりに回転し，その際その軸自身が，それに垂直でかつ楕円体の中心を通る方向 CD のまわりに回転しているとき，

その運動エネルギーを見いだせ．

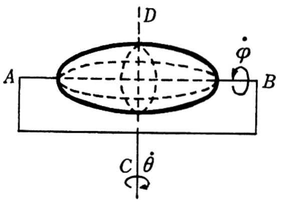


図 44

解 軸 CD のまわりの回転角を θ で表わし，軸 AB のまわりの回転角（CD と，AB に垂直な慣性軸 x_1 とのあいだの角度）を φ で表わす．すると，$\boldsymbol{\Omega}$ の慣性軸への射影は

$$\dot{\theta}\cos\varphi, \qquad \dot{\theta}\sin\varphi, \qquad \dot{\varphi}$$

である（このとき x_3 軸は AB に一致する）．楕円体の中心に一致する慣性中心は動かないから，運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}(I_1\cos^2\varphi + I_2\sin^2\varphi)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\varphi}^2.$$

10. 上の問題で，軸 AB が傾いており，楕円体がこの軸に関して対称であれば（図45）どうか．

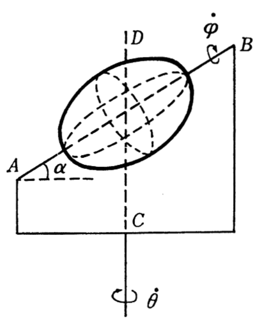


図 45

解 $\boldsymbol{\Omega}$ の軸 AB およびこれに垂直な他の２つの慣性主軸（任意にえらぶことができる）への射影は，

$$\dot{\theta}\cos\alpha\cos\varphi, \qquad \dot{\theta}\cos\alpha\sin\varphi, \qquad \dot{\varphi} + \dot{\theta}\sin\alpha$$

である．運動エネルギーは，

$$T = \frac{I_1}{2}\cos^2\alpha\cdot\dot{\theta}^2 + \frac{I_3}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\theta}\sin\alpha)^2.$$

§ 33. 剛体の角運動量

系の角運動量の大きさは，すでに知っているように，その基準となる点のえらび方に依存する．剛体の力学においてもっとも便利な方法は，この点として運動座標系の原点，すなわち，物体の慣性中心をえらぶことである． 以下で $\boldsymbol{M}$ と書けば，そのように定義された角運動量を表わすものと了解する．

公式（9.6）によれば，座標原点を物体の慣性中心にえらんだとき， その角運動量 $\boldsymbol{M}$ は，物体の各点の慣性中心に対する運動のみに関する《固有角運動量》に一致する．いいかえると， 定義式 $\boldsymbol{M} = \sum m[\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}]$ において， $\boldsymbol{v}$ として $[\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{r}]$ を代入しなければならない：

$$\boldsymbol{M} = \sum m[\boldsymbol{r}[\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{r}]] = \sum m\{r^2\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{\Omega})\},$$

あるいは，テンソル記号を使って

$$M_i = \sum m\{x_l^2\Omega_i - x_i x_k \Omega_k\} = \Omega_k \sum m\{x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k\}.$$

最後に慣性テンソルの定義（32.2）を考慮すると，結局

$$M_i = I_{ik}\Omega_k \tag{33.1}$$

が得られる．

x_1, x_2, x_3 軸を物体の慣性主軸の方向にとると，この式は

$$M_1 = I_1\Omega_1, \qquad M_2 = I_2\Omega_2, \qquad M_3 = I_3\Omega_3 \tag{33.2}$$

となる．

とくに，3つの主慣性モーメントがすべて等しい球状こまに対しては，簡単に

$$\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\Omega} \tag{33.3}$$

と書ける．すなわち，角運動量ベクトルは角速度ベクトルに比例し，それと同じ方向をもつ．

一般の任意の物体の場合には，ベクトル $\boldsymbol{M}$ は一般的にいってベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ と同じ方向をもたない．ただ，物体が慣性主軸のどれか1つのまわりに回転する場合にだけ，$\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{\Omega}$ が同じ方向をもつ．

いかなる外力の作用もうけていない剛体の自由な運動を考えよう．あまり興味のない一様な並進運動を除外することにすれば，問題になるのは剛体の自由な回転である．

すべての孤立した系の例にもれず，自由な回転をしている物体の角運動量は保存される．球状こまに対しては，$\boldsymbol{M}=$ 一定という条件は単に $\boldsymbol{\Omega}=$ 一定に帰する．このことは，球状こまの自由回転の一般的ケースが，単に，静止した軸のまわりの一様な回転であることを表わしている．

回転子の場合も簡単である．このときは，$\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\Omega}$ であるのに加えて，ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ が回転子の軸に垂直である．したがって，回転子の自由な回転は，1つの平面内での一様な回転であって，その回転軸の方向はこの平面に垂直である．

対称こまのもっと複雑な自由回転を求めるのにも，角運動量の保存法則が役立つ．

主慣性軸 x_1, x_2（こまの対称軸 x_3 に垂直）を自由にえらべることを利用して，x_2軸を，保存されるベクトル $\boldsymbol{M}$ と x_3 軸の瞬間的な位置とによってきまる平面に垂直にとる．すると $M_2 = 0$ となり，（33.2）式から明らかなように，$\Omega_2 = 0$ である．これは，$\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{\Omega}$，それにこまの軸の方向とが，各瞬間ごとに同一の平面内にあることを意味する（図46）．このことから今度は，こまの軸上のすべての

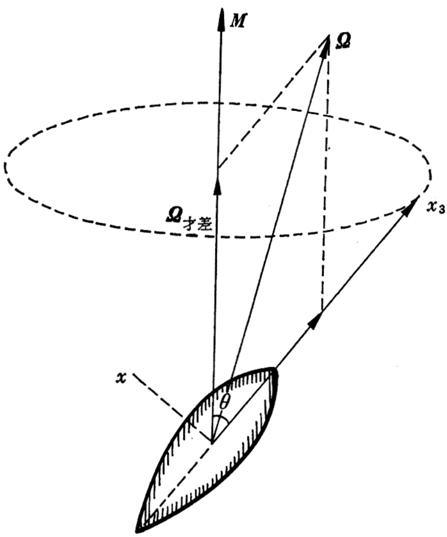


図 46

点の速度 $\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{\Omega r}]$ は，すべての瞬間をつうじてその平面に垂直であることがわかる；いいかえると，こまの軸は $\boldsymbol{M}$ の方向のまわりに，円錐をえがきながら一様な（つぎを見よ）回転をする（いわゆる，こまの**正常な才差運動**）．こまは，才差運動と同時に，自分の軸のまわりに一様な回転をおこなう．

これら2つの回転の角速度は，角運動量の大きさ M と，$\boldsymbol{M}$ の方向に対するこまの軸の傾きの角度 θ とによって容易に表わされる．自身の軸のまわりのこまの回転の角速度は，ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ のこの軸への射影 Ω_3 である：

$$\Omega_3=\frac{M_3}{I_3}=\frac{M}{I_3}\cos\theta. \qquad (33.4)$$

才差運動の角速度 $\Omega_{才差}$ を求めるには，ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ を平行4辺形の規則によって，x_3 方向および $\boldsymbol{M}$ 方向の成分に分けなければならない．そのうち第1の成分は，こまの軸のいかなる移動ももたらさない．第2の成分が求める才差運動の角速度を与える．図46から明らかなように $\sin\theta\,\Omega_{才差}=\Omega_1$ であるが，$\Omega_1=M_1/I_1=M\sin\theta/I_1$ であるから

$$\Omega_{才差}=\frac{M}{I_1} \qquad (33.5)$$

が得られる.

§34. 剛体の運動方程式

一般の場合，剛体は6個の自由度をもっているから，一般的な運動方程式は6個の独立な方程式を含まなければならない．それは，剛体の運動量および角運動量という2つのベクトルの時間導関数を与えるような形に書くことができる.

それらの方程式のうち前者は，剛体を構成する粒子のおのおのに対する方程式 $\dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{f}$ を単に加え合わせることによって得られる．ここに，$\boldsymbol{p}$ は各粒子の運動量，$\boldsymbol{f}$ はそれに働く力である．剛体の全運動量

$$\boldsymbol{P}=\sum\boldsymbol{p}=\mu\boldsymbol{V}$$

および，剛体に働くすべての力の合力 $\sum\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}$ を導入すると，

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{F} \tag{34.1}$$

が得られる.

われわれは $\boldsymbol{F}$ を，おのおのの粒子に働くすべての力 $\boldsymbol{f}$ の和として求めた．そのなかには，剛体中の他の粒子からの力も入っているのであるが，しかし，実際に $\boldsymbol{F}$ に入るのは，外部の原因から働く力だけである．剛体そのものの粒子相互のあいだに働く力は，すべて互いにうち消しあう．実際，外力がないときには，すべての孤立系の場合と同じく，剛体の運動量は保存され，したがって $\boldsymbol{F}=0$ でなければならない.

外部の場のなかの剛体のポテンシャル・エネルギーを U とすれば，力 $\boldsymbol{F}$ は，それを物体の慣性中心の座標に関して微分することによって与えられる：

$$\boldsymbol{F}=-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{R}_0}. \tag{34.2}$$

実際，剛体が $\delta\boldsymbol{R}$ だけ平行移動すれば，剛体の各点の位置ベクトル $\mathfrak{r}$ も同じだけ変化し，したがって，ポテンシャル・エネルギーの変化は

$$\delta U=\sum\frac{\partial U}{\partial\mathfrak{r}}\delta\mathfrak{r}=\delta\boldsymbol{R}\sum\frac{\partial U}{\partial\mathfrak{r}}=-\delta\boldsymbol{R}\sum\boldsymbol{f}=-\boldsymbol{F}\delta\boldsymbol{R}$$

となる.

ラグランジアン (32.4) をとれば，方程式 (34.1) は，慣性中心の座標に関するラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{V}}=\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{R}}$$

からも得られるということに注意する．このラグランジアンに対しては，

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{V}} = \mu \boldsymbol{V} = \boldsymbol{P}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{R}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{R}} = \boldsymbol{F}.$$

つぎに，角運動量 $\boldsymbol{M}$ の時間導関数をきめる第2の運動方程式を導こう．結論を簡単にするために，《静止》（慣性）基準系を，与えられた瞬間に剛体の慣性中心がそれに対して静止しているようにえらぶのが便利である．そのようにして得られる運動方程式は，ガリレイの相対性原理のために，他の任意の基準系でもそのままなりたつ．

さて，

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \frac{d}{dt}\sum[\boldsymbol{rp}] = \sum[\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{p}] + \sum[\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{p}}]$$

であるが，基準系を上のようにえらんだために（そのとき $\boldsymbol{V}=0$），与えられた時間における $\dot{\boldsymbol{r}}$ の値は速度 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$ に一致する．ベクトル $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ とは同じ方向をもつから，$[\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{p}]=0$，$\dot{\boldsymbol{p}}$ を力 $\boldsymbol{f}$ でおきかえると，結局

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = \boldsymbol{K} \qquad (34.3)$$

が得られる．ただし，

$$\boldsymbol{K} = \sum[\boldsymbol{rf}]. \qquad (34.4)$$

ベクトル $[\boldsymbol{rf}]$ は**力 $\boldsymbol{f}$ のモーメント**とよばれる．したがって，$\boldsymbol{K}$ は物体に働くすべての力のモーメントの和である．合力 $\boldsymbol{F}$ と同じく，(34.4) の和をとるときにも，実際には外力だけを考えればよい．角運動量の保存法則に対応して，孤立した系の内部で働くすべての力のモーメントの和はゼロにならなければならない．

力のモーメントは，角運動量と同様，一般的にいって，それを定める基準となる座標原点の選び方に依存する．(34.3)，(34.4) におけるモーメントは，物体の慣性中心に関して定められている．

座標原点を距離 $\boldsymbol{a}$ の点に移したとき，物体の各点の新しい位置ベクトル $\boldsymbol{r}'$ は，古い $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{a}$ によって結ばれる．したがって，

$$\boldsymbol{K} = \sum[\boldsymbol{rf}] = \sum[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{f}] + \sum[\boldsymbol{af}],$$

あるいは

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}' + [\boldsymbol{aF}]. \qquad (34.5)$$

このことから，とくに，全合力 $\boldsymbol{F}=0$（このような場合，物体には《**偶力**》が働

いているという）ならば，力のモーメントの大きさは座標原点のえらび方によらないことが明らかになる．

方程式（34.3）は，《回転を表わす座標》に関するラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\Omega}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\varphi}}$$

とみなすことができる．実際ラグランジアン（32.4）をベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ の成分で微分すると，

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega_i} = I_{ik}\Omega_k = M_i$$

となる．物体が無限小の角度 $\delta\boldsymbol{\varphi}$ だけ回転したときのポテンシャル・エネルギー U の変化は

$$\delta U = -\sum \boldsymbol{f}\delta\mathfrak{r} = -\sum \boldsymbol{f}[\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{r}] = -\delta\boldsymbol{\varphi}\sum[\boldsymbol{r}\boldsymbol{f}] = -\boldsymbol{K}\delta\boldsymbol{\varphi}$$

に等しい．これから

$$\boldsymbol{K} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varphi}}, \tag{34.6}$$

したがって

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{K}.$$

ベクトル $\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{K}$ が互いに垂直であると仮定しよう．この場合にはいつも（34.5）式の $\boldsymbol{K}'$ をゼロとするような，つまり，

$$\boldsymbol{K} = [\boldsymbol{a}\boldsymbol{F}] \tag{34.7}$$

とするようなベクトル $\boldsymbol{a}$ を見いだすことができる．その際，$\boldsymbol{a}$ は一意的にはきまらない．$\boldsymbol{F}$ に平行な任意のベクトルを $\boldsymbol{a}$ に付け加えても，等式（34.7）は変わらないから，$\boldsymbol{K}'=0$ という条件は運動座標系における定まった点を与えるのでなく，直線を定めるだけである．このように，$\boldsymbol{K}\perp\boldsymbol{F}$ のときには，剛体に働くすべての力からの作用を，一定の直線上に作用点をもつ1つの力 $\boldsymbol{F}$ に帰着させることができる．

たとえば，そのなかで質点に働く力が $\boldsymbol{f}=e\boldsymbol{E}$ の形をしている一様な力の場がそのような場合である．ここで，$\boldsymbol{E}$ は場を特徴づける定数のベクトル，e は与えられた場に関する粒子の性質を特徴づける量である[1]．そのような場合には，

1）たとえば，一様な電場では，$\boldsymbol{E}$ は場の強さ，e は粒子の電荷である．一様な重力場では，$\boldsymbol{E}$ は重力の加速度 $\boldsymbol{g}$ であり，e は粒子の質量 m である．

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}\sum e, \qquad \boldsymbol{K}=[\sum e\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}]$$

となる．$\sum e \neq 0$ と仮定し，

$$\boldsymbol{r}_0=\frac{\sum e\boldsymbol{r}}{\sum e} \tag{34.8}$$

によって定義される位置ベクトル $\boldsymbol{r}_0$ を導入する．すると，全体の力のモーメントに対してつぎのような簡単な表式が得られる：

$$\boldsymbol{K}=[\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{F}]. \tag{34.9}$$

こうして，一様な場のなかでの剛体の運動においては，場の影響は，位置ベクトル（34.8）の点に加わる1つの力 $\boldsymbol{F}$ の作用に帰着させることができる．その点の位置は，物体自身の性質によって完全にきまってしまう　たとえば，重力場ではこの点は物体の慣性中心に一致する．

§ 35.　オイラーの角

すでに述べたように，剛体の運動を記述するためには，剛体の慣性中心の3つの座標と，運動座標系の軸 x_1, x_2, x_3 の静止座標系 X, Y, Z に対する方向を定め

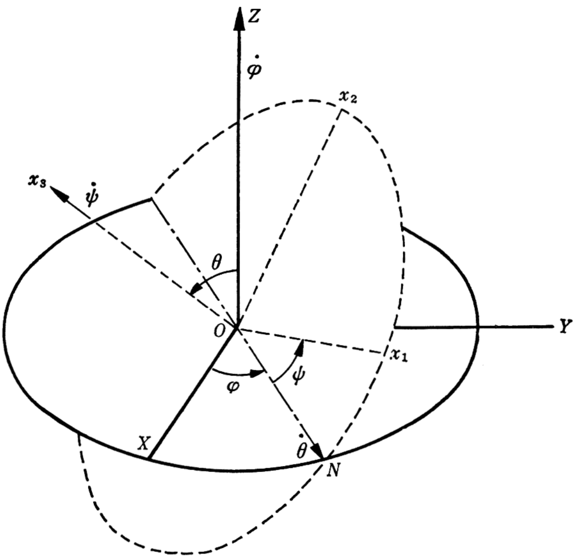


図　47

る任意の3つの角度とを使うことができる．この角度としては，多くの場合，いわゆる**オイラーの角**を使うのが便利である．

いまわれわれの関心は座標軸のあいだの角度だけにあるから，両方の系の原点を同一の点にとる（図47）．動く平面 x_1x_2 は動かない平面 XY と1つの直線（図47の ON）で交わる．この直線は**交線**とよばれるが，明らかに Z 軸にも x_3 軸にも垂直である．その正の方向は，ベクトル積 $[\boldsymbol{z}\boldsymbol{x}_3]$（$\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}_3$ は Z および x_3 軸の方向の単位ベクトル）の方向と一致するようにとる．

X, Y, Z 軸に対する x_1, x_2, x_3 軸の方向を定める量として，つぎのような角度をとる．すなわち，Z 軸と x_3 軸のあいだの角度 θ, X 軸と N 軸のあいだの角度 φ, および N 軸と x_1 軸のあいだの角度 ψ である．角度 φ および ψ は，それぞれ Z 軸および x_3 軸のまわりに右ねじの向きにはかる． 角度 θ はゼロから π までの値をとるが，角度 φ と ψ はゼロから 2π まで変化する[1]．

そこで，角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ の運動軸 x_1, x_2, x_3 方向の成分を，オイラーの角とその導関数によって表わそう．そのために，角速度 $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ をこれらの軸に射影しなければならない．角速度 $\dot{\theta}$ は交線 ON の方向をむいており，その x_1, x_2, x_3 軸方向の成分は

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi, \qquad \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi, \qquad \dot{\theta}_3 = 0$$

に等しい．角速度 $\dot{\varphi}$ の方向は Z 軸に一致する．その x_3 軸への射影は $\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}\cos\theta$, 平面 x_1x_2 への射影は $\dot{\varphi}\sin\theta$ に等しい． 後者を x_1 および x_2 軸方向の成分に分解すると，

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi, \qquad \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi$$

となる．最後に，角速度 $\dot{\psi}$ は x_3 軸の方向をむいている．

各軸の方向のこれらの成分をよせ集めることによって，結局

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \\ \Omega_2 &= \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi, \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned} \tag{35.1}$$

が得られる．

x_1, x_2, x_3 軸を剛体の慣性主軸にえらべば， オイラーの角が表わした回転の運

1） 角度 θ および $\varphi - \pi/2$ は，それぞれ X, Y, Z 軸に関する x_3 軸の方向の極角および方位角を表わす．同時に θ および $\pi/2 - \psi$ はそれぞれ，x_1, x_2, x_3 軸に関する Z 軸の方向の極角および方位角である．

動エネルギーは，(35.1) を (32.8) に代入することによって得られる．

$I_1 = I_2 \neq I_3$ であるような対称こまに対しては，簡単な計算ののち

$$T_{回転} = \frac{I_1}{2}(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 \qquad (35.2)$$

が得られる．この表式は，対称こまでは慣性主軸 x_1, x_2 を任意にえらべることを利用すれば，もっと簡単に見いだされることに注目しよう．x_1 軸は交線 ON に一致する，つまり，$\psi = 0$ であるとみなせば，角速度の成分としてずっと簡単な表現が得られる：

$$\Omega_1 = \dot{\theta}, \qquad \Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta, \qquad \Omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}. \qquad (35.3)$$

オイラーの角の簡単な応用例として，われわれがすでに知っている対称こまの自由な運動をそれの助けをかりて決定しよう．

静止座標系の Z 軸を，こまの保存される角運動量 $\boldsymbol{M}$ の方向にとる．運動系の x_3 軸はこまの軸の方向をむいているが，x_1 軸は，与えられた瞬間において，交線と一致するものとしよう．すると，ベクトル $\boldsymbol{M}$ の成分は，(35.3) 式の助けをかりて

$$M_1 = I_1\Omega_1 = I_1\dot{\theta}, \quad M_2 = I_1\Omega_2 = I_1\dot{\varphi}\sin\theta, \quad M_3 = I_3\Omega_3 = I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})$$

となる．他方，x_1 軸（交線）は Z 軸に垂直であるから

$$M_1 = 0, \qquad M_2 = M\sin\theta, \qquad M_3 = M\cos\theta$$

である．これらの表式を互いに等しいとおくと，

$$\dot{\theta} = 0, \qquad I_1\dot{\varphi} = M, \qquad I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) = M\cos\theta \qquad (35.4)$$

という等式が得られる．

この最初の式から $\theta = \mathrm{const}$，すなわち，こまの軸は $\boldsymbol{M}$ の方向に対して一定の傾きをなすことがわかる．第2の式は，才差運動の角速度 $\dot{\varphi} = M/I_1$ を定める（(33.5) に一致)．最後に第3の式は，こまの自分自身の軸のまわりの回転の角速度 $\Omega_3 = M\cos\theta/I_3$ を与える．

問　題

1. 下端の動かない対称こまの重力のもとでの運動（図48）の問題を積分算に帰着せよ．

解　運動座標系と静止座標系の共通の原点を，こまの不動点 O にとり，Z 軸は鉛直であるとする（図48)．重力場のなかのこまのラグランジアンは

$$L = \frac{I_1 + \mu l^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 - \mu g l\cos\theta$$

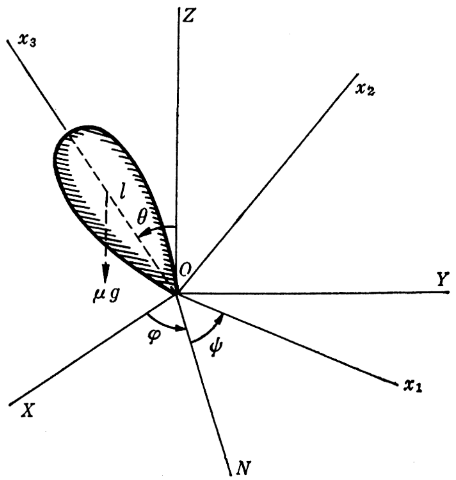


図　48

である（μはこまの質量，lは下端から慣性中心までの距離）．

座標ψとφは循環座標である．したがって，運動の積分が2つある：

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta) = \mathrm{const} \equiv M_3, \tag{1}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = (I_1'\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta)\dot\varphi + I_3\dot\psi\cos\theta = \mathrm{const} \equiv M_z. \tag{2}$$

ここで $I_1' = I_1 + \mu l^2$ という量を導入した（量 p_ψ および p_φ はそれぞれ，点Oに関する角運動量の x_3 および Z 軸の方向の成分を表わす）．さらに，エネルギー

$$E = \frac{I_1'}{2}(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)^2 + \mu gl\cos\theta \tag{3}$$

が保存される．

式（1）および（2）から，

$$\dot\varphi = \frac{M_z - M_3\cos\theta}{I_1'\sin^2\theta}, \tag{4}$$

$$\dot\psi = \frac{M_3}{I_3} - \cos\theta\,\frac{M_z - M_3\cos\theta}{I_1'\sin^2\theta} \tag{5}$$

が見いだされる．これらの助けをかりてエネルギー（3）から$\dot\varphi$と$\dot\psi$を消去すると，

$$E' = \frac{I_1'}{2}\dot\theta^2 + U_{有効}(\theta)$$

が得られる．ここで，

$$E' = E - \frac{M_3^2}{2I_3} - \mu gl, \qquad U_{有効}(\theta) = \frac{(M_z - M_3\cos\theta)^2}{2I_1'\sin^2\theta} - \mu gl(1-\cos\theta) \tag{6}$$

という記号を導入した．これから $\dot{\theta}$ を求め，変数分離をおこなえば

$$t=\int\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1'}(E'-U_{\text{有効}}(\theta))}} \tag{7}$$

となる（楕円積分）．そうすると，角度 ψ および φ は，方程式 (4)，(5) を使って得られる積分の形で，角度 θ の関数として表わされる．

運動に対する角度 θ の変域は，$E'\geqq U_{\text{有効}}(\theta)$ という条件によってきまる．関数 $U_{\text{有効}}(\theta)$ は（$M_3\neq M_z$ のとき）$\theta=0$ および $\theta=\pi$ の値に対して $+\infty$ にむかい，その中間で極小値をとる．したがって，方程式 $E'=U_{\text{有効}}(\theta)$ は，こまの鉛直線に対する傾きの角度の極値 θ_1,θ_2 を与える2個の根をもつ．

角度 θ が θ_1 から θ_2 まで変わるあいだに導関数 $\dot{\varphi}$ の符号は，差 $M_z-M_3\cos\theta$ がこの区間で符号を変えるか変えないかにしたがって，変化し，または変化しない．変化しない場合，こまの軸は鉛直線のまわりに単調に才差運動をし同時に，上下に振動する（**章動**とよばれる：図49 a．曲線は，こまの軸がこまの不動点を中心とする球面上にえがく軌跡を表

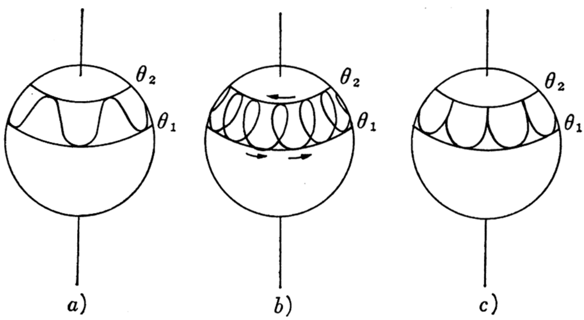


図　49

わす）．符号が変化する場合には，才差運動の向きは2つの限界の円の上で反対で，したがってこまの軸はループをえがきながら鉛直線のまわりを回る（図49 b）．最後に，θ_1,θ_2 のどちらかがちょうど差 $M_z-M_3\cos\theta$ の値をゼロにするならば，それに対応する限界線上の点で $\dot{\varphi}$ および $\dot{\theta}$ の値が同時にゼロとなり，こまの軸は図 49 c に示すような型の軌跡をえがく．

2.　鉛直軸のまわりのこまの回転が安定であるような条件を見いだせ．

解　$\theta=0$ のとき x_3 軸と Z 軸とは一致し，したがって，$M_3=M_z, E'=0$ となる．この軸のまわりの回転は，$\theta=0$ という値が関数 $U_{\text{有効}}(\theta)$ の極小に対応するとき安定になる．小さな θ に対して

$$U_{有効} \approx \left(\frac{M_3^2}{8I_1'} - \frac{\mu g l}{2}\right)\theta^2$$

であるから，これから条件 $M_3^2 > 4I_1'\mu g l$，あるいは

$$\Omega_3^2 > \frac{4I_1'\mu g l}{I_3^2}$$

が得られる．

3. 自転の運動エネルギーが重力場のエネルギーにくらべて大きい場合のこまの運動を求めよ（《速い》こまとよばれる）．

解 重力場を無視した第1近似では，こまの軸は角運動量 $\boldsymbol{M}$ の方向のまわりに自由な才差運動をする（これが，この問題全体におけるこまの章動になる）．その角速度は (33.5) によって

$$\boldsymbol{\Omega}_{章動} = \frac{\boldsymbol{M}}{I_1'}. \qquad (1)$$

つぎの近似では，鉛直方向のまわりに角運動量 $\boldsymbol{M}$ がゆっくり才差運動をする（図50）．この才差運動の速度を求めるために，正確な運動方程式 (34.3)

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = \boldsymbol{K}$$

を章動の周期にわたって平均する．こまに働く重力のモーメントは $\boldsymbol{K} = \mu l[\boldsymbol{n}_3\boldsymbol{g}]$ に等しい．ここに $\boldsymbol{n}_3$ はこまの軸の方向の単位ベクトルである．対称性から判断して明らかに，$\boldsymbol{K}$ を《章動の円錐》について平均した結果は，ベクトル $\boldsymbol{n}_3$ をその $\boldsymbol{M}$ 方向への射影 $\cos\alpha \cdot \boldsymbol{M}/M$ でおきかえることに帰着する（α は $\boldsymbol{M}$ とこまの軸のあいだの角度）．こうして，方程式

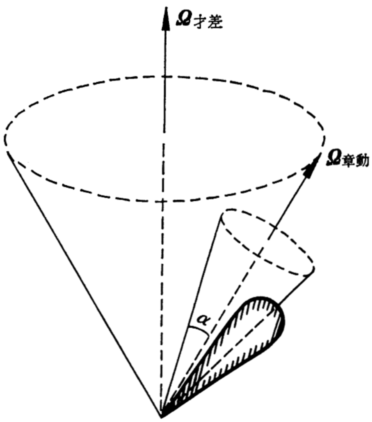


図 50

$$\overline{\frac{d\boldsymbol{M}}{dt}} = -\cos\alpha\frac{\mu l}{M}[\boldsymbol{g}\boldsymbol{M}]$$

が得られる．これは，ベクトル $\boldsymbol{M}$ が方向 $\boldsymbol{g}$（鉛直線）のまわりに平均の角速度

$$\overline{\boldsymbol{\Omega}}_{才差} = -\frac{\mu l\cos\alpha}{M}\boldsymbol{g} \qquad (2)$$

で（$\Omega_{章動}$ にくらべると小さい）才差運動をすることを意味する．

考えている近似では，式 (1) および (2) に入ってくる量 M と $\cos\alpha$ とは保存される

（厳密にいうと，これらは運動の積分でないけれども）．それらは同じ正確度で，厳密に保存される量 E および M_3 とそれぞれ

$$M_3 = M\cos\alpha, \qquad E \approx \frac{M^2}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{I_3} + \frac{\sin^2\alpha}{I_1'}\right)$$

の関係にある．

§ 36.　オイラーの運動方程式

§34 で与えた運動方程式は，静止座標系に関して運動を記述する．方程式（34.1）と（34.3）に現われる導関数 $d\boldsymbol{P}/dt, d\boldsymbol{M}/dt$ は，この座標系に対するベクトル $\boldsymbol{P}$ および $\boldsymbol{M}$ の変化を表わす．しかしながら，剛体の回転の角運動量 $\boldsymbol{M}$ の成分と角速度の成分とのあいだにもっとも簡単な関係が存在するのは，慣性主軸と同じ方向の軸をもつ運動座標系である．その関係を利用するためには，運動方程式をあらかじめ運動座標系 x_1, x_2, x_3 で書きなおす必要がある．

$d\boldsymbol{A}/dt$ を，静止座標系における任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ の変化の速さとしよう．もしベクトル $\boldsymbol{A}$ が回転系に対しては変化しないならば，静止系に対するそれの変化は回転のみによって生ずるもので，そのとき

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = [\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{A}]$$

である（§9を見よ．そこで指摘したように，（9.1），（9.2）のような公式は任意のベクトルに対してなりたつ）．一般の場合には，この等式の右辺に，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の運動系に対する変化の速さを付け加えねばならない．この速さを $d'\boldsymbol{A}/dt$ で表わすと，

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{A}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{A}]. \tag{36.1}$$

この一般公式を使うと，方程式（34.1）および（34.3）はただちに

$$\frac{d'\boldsymbol{P}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{P}] = \boldsymbol{F}, \qquad \frac{d'\boldsymbol{M}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{M}] = \boldsymbol{K} \tag{36.2}$$

という形に書ける．ここで，時間についての微分は運動座標系でおこなわれるから，

$$\left(\frac{d'\boldsymbol{P}}{dt}\right)_1 = \frac{dP_1}{dt}, \cdots, \left(\frac{d'\boldsymbol{M}}{dt}\right)_1 = \frac{dM_1}{dt}, \cdots$$

と書いて，方程式をただちにこの系の軸へ射影することができる．ただし，添字 1, 2, 3 は x_1, x_2, x_3 軸の方向の成分を表わす．そのとき，第1の方程式で $\boldsymbol{P}$ を

$\mu \boldsymbol{V}$ でおきかえると，

$$\mu\left(\frac{dV_1}{dt}+\Omega_2 V_3-\Omega_3 V_2\right)=F_1,$$
$$\mu\left(\frac{dV_2}{dt}+\Omega_3 V_1-\Omega_1 V_3\right)=F_2, \tag{36.3}$$
$$\mu\left(\frac{dV_3}{dt}+\Omega_1 V_2-\Omega_2 V_1\right)=F_3$$

が得られる．x_1, x_2, x_3 軸は慣性主軸の方向にえらんであると仮定し，(36.2) の第２式で $M_1=I_1\Omega_1$ 等々と書くと

$$I_1\frac{d\Omega_1}{dt}+(I_3-I_2)\Omega_2\Omega_3=K_1,$$
$$I_2\frac{d\Omega_2}{dt}+(I_1-I_3)\Omega_3\Omega_1=K_2, \tag{36.4}$$
$$I_3\frac{d\Omega_3}{dt}+(I_2-I_1)\Omega_1\Omega_2=K_3$$

を得る．

方程式 (36.4) は**オイラーの運動方程式**とよばれる．

自由な回転のときは $\boldsymbol{K}=0$ で，オイラーの運動方程式は

$$\frac{d\Omega_1}{dt}+\frac{I_3-I_2}{I_1}\Omega_2\Omega_3=0,$$
$$\frac{d\Omega_2}{dt}+\frac{I_1-I_3}{I_2}\Omega_3\Omega_1=0, \tag{36.5}$$
$$\frac{d\Omega_3}{dt}+\frac{I_2-I_1}{I_3}\Omega_1\Omega_2=0$$

という形をとる．

例として，われわれがすでに考察した対称こまの自由な回転にこの方程式を応用してみよう．$I_1=I_2$ とおくと，３番目の式から $\dot{\Omega}_3=0$，すなわち $\Omega_3=\text{const}$ を得る．これによって，はじめの２つの式は

$$\dot{\Omega}_1=-\omega\Omega_2, \qquad \dot{\Omega}_2=\omega\Omega_1$$

という形に書かれる．ここに，大きさ一定の量

$$\omega=\Omega_3\frac{I_3-I_1}{I_1} \tag{36.6}$$

を導入した．第２の式に i をかけて第１の式に加えると

$$\frac{d}{dt}(\Omega_1+i\Omega_2)=i\omega(\Omega_1+i\Omega_2)$$

が得られる．これから

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = Ae^{i\omega t}.$$

ここに，Aは定数である．これは実数とみなすことができ（それには，時間の原点を適当にえらべばよい），そうすると

$$\Omega_1 = A\cos\omega t, \qquad \Omega_2 = A\sin\omega t. \tag{36.7}$$

この結果は，こまの軸に垂直な平面への角速度の射影は，この平面内で角速度ωで回転し，その大きさは一定にたもたれる（$\sqrt{\Omega_1^2+\Omega_2^2}=A$）ことを示している．こまの軸への射影$\Omega_3$も一定であるから，全ベクトル$\boldsymbol{\Omega}$は，大きさ不変のまま，こまの軸のまわりに角速度$\omega$で回転すると結論される．ベクトル$\boldsymbol{\Omega}$と$\boldsymbol{M}$の成分のあいだに$M_1=I_1\Omega_1$，$M_2=I_2\Omega_2$，$M_3=I_3\Omega_3$という関係があるから，角運動量ベクトル$\boldsymbol{M}$も同様の運動（こまの軸に関して）をすることは明らかである．

得られた結果は，いうまでもなく，すでに§33および§35で静止座標系に関して考察したのと同じこまの運動を，別の側面から見たものにすぎない．とくに，ベクトル$\boldsymbol{M}$（図48のZ軸）のx_3軸のまわりの回転の角速度は，オイラーの角を使うと，角速度$-\dot{\psi}$に一致する．（35.4）式から，

$$\dot{\psi} = \frac{M\cos\theta}{I_3} - \dot{\varphi}\cos\theta = M\cos\theta\left(\frac{1}{I_3}-\frac{1}{I_1}\right),$$

あるいは

$$-\dot{\psi} = \Omega_3\frac{I_3-I_1}{I_1}$$

が得られる．これは（36.6）に合致する．

§37. 非対称こま

オイラーの運動方程式を使って，3つの慣性モーメントがすべてことなるような非対称こまの自由な回転という，いっそう複雑な問題をしらべよう．はっきりさせるために，

$$I_3 > I_2 > I_1 \tag{37.1}$$

とする．

オイラーの方程式の2つの積分はあらかじめわかっている．それはエネルギーと角運動量との保存法則を与えるもので，

$$I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2 = 2E,$$

$$I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2 = M^2 \tag{37.2}$$

という等式で表わされる．ここで，エネルギー E と角運動量の絶対値 M とは与えられた定数である．これら２つの等式をベクトル $\boldsymbol{M}$ の成分を使って表わすと，

$$\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} = 2E, \tag{37.3}$$

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2 \tag{37.4}$$

という形になる．

これだけからも，こまの運動の特質についていくつかの結論をひき出すことができる．そのために，M_1, M_2, M_3 を座標とみたとき，式（37.3）および（37.4）は幾何学的にはそれぞれ，半軸

$$\sqrt{2EI_1}, \qquad \sqrt{2EI_2}, \qquad \sqrt{2EI_3}$$

の楕円体の表面，および半径 M の球面の方程式になっていることに注意する．

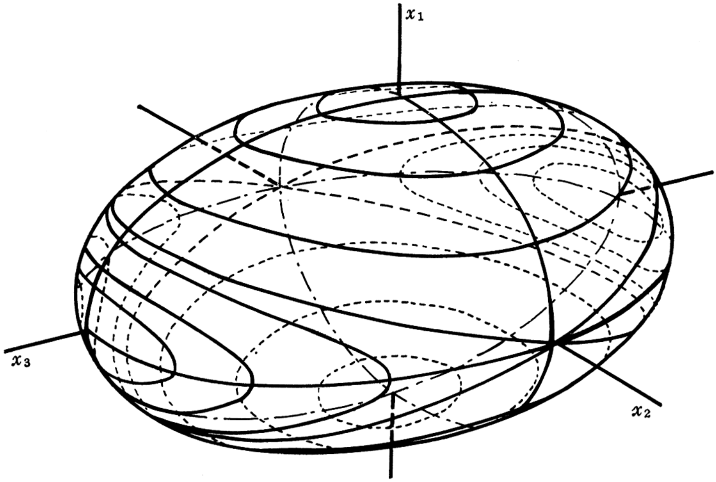


図　51

ベクトル $\boldsymbol{M}$ が（こまの慣性軸に対して）動くとき，その端は，この２つの面の交線にそって移動する（図51には，楕円体とさまざまの半径の球との交線がえがいてある）．交線が存在するためには，明らかに不等式

$$2EI_1 < M^2 < 2EI_3 \tag{37.5}$$

がなりたつことが必要である．この式は幾何学的には，球（37.4）の半径が楕円体（37.3）の半軸の最大と最小のもののあいだにあることを意味する．

Mの大きさが変化する（エネルギーEが与えられたとき）のに応じて，ベクトル$\boldsymbol{M}$の端点がえがくこの《軌跡》[1]の特徴がどう変わるかをしらべよう．M^2が$2EI_1$をわずかしかこえないときは，球は楕円体の２つの極の近くでx_1軸をとりかこむ２つの小さな閉曲線で楕円体をきる（$M^2 \to 2EI_1$のとき，これらの曲線は点——極——に近づく）．M^2が増大するにつれて，これらの曲線は広がるが，$M^2=2EI_2$になると，楕円体のx_2軸上の極で互いに交わる２つの平面曲線（楕円）となる．さらにM^2が増大すると，ふたたび２つの別々の閉じた軌跡が現われるが，それらはx_3軸上の極を囲む曲線である：$M^2 \to 2EI_3$のとき，それらは２つの点にちぢまる．

なによりもまず，軌跡が閉じていることは，ベクトル$\boldsymbol{M}$のこまに対する動きが周期的であることを意味することを強調しよう．１周期のあいだに，ベクトル$\boldsymbol{M}$はある錐面をえがいてもとの位置にもどるのである．

さらに，楕円体のことなる極の近くの軌跡は互いに本質的にことなる特徴をもっていることを指摘しておこう．軸x_1およびx_3の近くの軌跡は，まったく極の近傍のなかにあるのに対して，x_2軸上の極の近くを通る軌跡は，さらに先にすすむとこの点からずっと離れた点にまで遠ざかる．このような差違は，３つの慣性主軸のまわりのこまの回転の安定性がことなった特徴をもつことに対応している．軸x_1およびx_3（こまの３つの慣性モーメントのうち最大および最小のものに対応する）のまわり回転は，その状態からすこしくらいはずれても，はじめのものに近い運動をつづける，という意味で安定である．ところが，x_2軸のまわりの回転は安定でない．こまをはじめの状態から遠くはなれた状態にもってゆくような運動を生じさせるには，小さな偏差で十分である．

$\boldsymbol{\Omega}$の成分（あるいは，それに比例する$\boldsymbol{M}$の成分）が時間にどう依存するかを知るために，オイラーの方程式（36.5）にもどろう．２つの式（37.2)，(37.3）を使って，Ω_1およびΩ_3をΩ_2で表わすと，

$$\begin{aligned}\Omega_1^2 &= \frac{1}{I_1(I_3-I_1)}\{(2EI_3-M^2)-I_2(I_3-I_2)\Omega_2^2\},\\ \Omega_3^2 &= \frac{1}{I_3(I_3-I_1)}\{(M^2-2EI_1)-I_2(I_2-I_1)\Omega_2^2\}\end{aligned} \qquad (37.6)$$

となる．これらを（36.5）の第２の式に代入すると，

1）ベクトル$\boldsymbol{\Omega}$の端点がえがく同様の曲線はポールホードとよばれる．

$$\frac{d\Omega_2}{dt}=\frac{I_3-I_1}{I_2}\Omega_1\Omega_3$$

$$=\frac{1}{I_2\sqrt{I_1I_3}}\{[(2EI_3-M^2)-I_2(I_3-I_2)\Omega_2^2][(M^2-2EI_1)$$

$$-I_2(I_2-I_1)\Omega_2^2]\}^{1/2} \quad (37.7)$$

が得られる．この方程式を変数分離して積分すれば，関数 $t(\Omega_2)$ が楕円積分の形に得られる．それを標準形へもってゆくのであるが，議論を確定するために

$$M^2>2EI_2$$

とみなそう（逆の場合には，以下のすべての式で，添字1と3を入れかえねばならない）．t と Ω_2 に代わる新しい変数

$$\tau=t\sqrt{\frac{(I_3-I_2)(M^2-2EI_1)}{I_1I_2I_3}}, \qquad s=\Omega_2\sqrt{\frac{I_2(I_3-I_2)}{2EI_3-M^2}}, \quad (37.8)$$

および

$$k^2=\frac{(I_2-I_1)(2EI_3-M^2)}{(I_3-I_2)(M^2-2EI_1)} \quad (37.9)$$

によって正のパラメター $k^2<1$ を導入すると，

$$\tau=\int_0^s\frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

が得られる（$\Omega_2=0$ の瞬間を時間の原点にとると約束しよう）．この積分で表わされる関数の逆関数として，周知のように，ヤコービの楕円関数の1つ

$$s=\operatorname{sn}\tau$$

が現われ，これによって Ω_2 の時間依存もきまる．関数 $\Omega_1(t)$ および $\Omega_3(t)$ は，(37.6) によって，代数的に $\Omega_2(t)$ で表わされる．楕円関数相互の定義

$$\operatorname{cn}\tau=\sqrt{1-\operatorname{sn}^2\tau}, \qquad \operatorname{dn}\tau=\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2\tau}$$

に注意して，結局つぎの式が得られる．

$$\Omega_1=\sqrt{\frac{2EI_3-M^2}{I_1(I_3-I_1)}}\operatorname{cn}\tau,$$

$$\Omega_2=\sqrt{\frac{2EI_3-M^2}{I_2(I_3-I_2)}}\operatorname{sn}\tau, \quad (37.10)$$

$$\Omega_3=\sqrt{\frac{M^2-2EI_1}{I_3(I_3-I_1)}}\operatorname{dn}\tau.$$

関数 (37.10) は周期関数である．そして，その変数 τ で表わした周期は，よく知られているように，第1種完全楕円積分

$$K=\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}=\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} \tag{37.11}$$

を使うと，$4K$ に等しい．したがって，時間で表わした周期は

$$T=4K\sqrt{\frac{I_1I_2I_3}{(I_3-I_2)(M^2-2EI_1)}} \tag{37.12}$$

で与えられる．これだけの時間がたつと，ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ は，こまの軸に対してはじめと同じ位置にもどる（その際，こまそのものはけっして，静止座標系に対してはじめと同じ位置にもどりはしない．下を見よ）．

$I_1=I_2$ のときには，（37.10）式はもちろん前節で対称こまに対して得た公式に帰着する．実際，$I_1\to I_2$ のときパラメター $k^2\to 0$ で，楕円関数は円関数になってしまう：

$$\mathrm{sn}\,\tau\longrightarrow\sin\tau,\qquad \mathrm{cn}\,\tau\longrightarrow\cos\tau,\qquad \mathrm{dn}\,\tau\longrightarrow 1.$$

こうして，公式（36.7）にもどる．

$M^2=2EI_3$ のときには，$\Omega_1=\Omega_2=0$，$\Omega_3=\mathrm{const}$ である．すなわち，ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ の方向は不変で，それは慣性軸 x_3 の方向に一致する．この場合は，x_3 軸のまわりのこまの一様な回転である．同様にして，$M^2=2EI_1$ のときは（このとき $\tau\equiv 0$），x_1 軸のまわりの一様な回転である．

空間におけるこまの絶対的な（静止座標系 X,Y,Z に対する）運動を時間の関数として求めることに移ろう．そのために，こまの軸 x_1,x_2,x_3 と X,Y,Z 軸とのあいだのオイラーの角 ψ,φ,θ を導入する．その際，動かない軸 Z は不変なベクトル $\boldsymbol{M}$ の方向にとる．x_1,x_2,x_3 軸に対する Z の方向の極角の方位角とは，それぞれ θ および $\pi/2-\psi$ であるから（139 ページの注意を見よ），ベクトル $\boldsymbol{M}$ を軸 x_1,x_2,x_3 に射影すると，

$$\begin{aligned}M\sin\theta\sin\psi&=M_1=I_1\Omega_1,\\ M\sin\theta\cos\psi&=M_2=I_2\Omega_2,\\ M\cos\theta&=M_3=I_3\Omega_3\end{aligned} \tag{37.13}$$

を得る．これから

$$\cos\theta=\frac{I_3\Omega_3}{M},\qquad \tan\psi=\frac{I_1\Omega_1}{I_2\Omega_2}. \tag{37.14}$$

そして，（37.10）式を使って

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{I_3(M^2-2EI_1)}{M^2(I_3-I_1)}}\mathrm{dn}\,\tau,$$

$$\tan\psi = \sqrt{\frac{I_1(I_3-I_2)}{I_2(I_3-I_1)}}\frac{\mathrm{cn}\,\tau}{\mathrm{sn}\,\tau} \tag{37.15}$$

が見いだされる．これによって，θ と ψ が時間にどう依存するかも決定される．それらは，ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ の成分と同じく，(37.12) を周期とする周期関数である．

(37.13) 式には角 φ が含まれていない．それを計算するには，$\boldsymbol{\Omega}$ の成分をオイラーの角の導関数によって表わす (35.1) 式にもどらなければならない．等式

$$\Omega_1 = \dot\varphi\sin\theta\sin\psi + \dot\theta\cos\psi,$$
$$\Omega_2 = \dot\varphi\sin\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi$$

から $\dot\theta$ を消去して

$$\dot\varphi = \frac{\Omega_1\sin\psi + \Omega_2\cos\psi}{\sin\theta}$$

を得る．そののち (37.13) 式を使うと，

$$\frac{d\varphi}{dt} = M\frac{I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2}{I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2} \tag{37.16}$$

が得られる．関数 $\varphi(t)$ はこれから積分によって求められるが，被積分関数は楕円関数の複雑な組み合せを含んでいる．この積分は，かなりめんどうな変形をいくつかおこなうことによって，テータ関数とよばれる関数で表わすことができる．しかし，計算には立ち入らないで[1]，その最後の結果だけを示しておこう．

関数 $\varphi(t)$ は（任意の付加定数を除いて）2つの項の和の形に書ける：

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t). \tag{37.17}$$

2つの項の一方は，

$$e^{2i\varphi_1(t)} = \frac{\vartheta_{01}\left(\dfrac{2t}{T} - i\alpha\right)}{\vartheta_{01}\left(\dfrac{2t}{T} + i\alpha\right)} \tag{37.18}$$

という式によって与えられる．ここに ϑ_{01} はテータ関数，α は

$$\mathrm{sn}\,(i2\alpha K) = i\sqrt{\frac{I_3(M^2-2EI_1)}{I_1(2EI_3-M^2)}} \tag{37.19}$$

によってきまる実定数である（K と T は (37.11)，(37.12) で与えられる)．(37.18) の右辺は周期 $T/2$ の周期関数である．したがって，$\varphi_1(t)$ は時間 T のあいだに 2π だけ変化する．(37.17) の第2の被加関数は，

---

1) その計算はつぎの本のなかに見いだすことができる：E. T. Whittaker ; *A Treatise on the Analytical Dynamics*, Cambridge, 1937.

$$\varphi_2(t) = 2\pi\frac{t}{T'}, \qquad \frac{1}{T'} = \frac{M}{2\pi I_1} - \frac{i}{\pi T}\frac{\vartheta'_{01}(i\alpha)}{\vartheta_{01}(i\alpha)} \tag{37.20}$$

という式によって与えられる．この関数は，時間 T' のあいだに 2π の増加を示す．このように，φ についての運動は，2つの周期的変化のかさなったものである．そして，周期の1つ (T) は，角度 ψ および θ の変化の周期に一致し，もう1つ (T') は前者と通約不能の値をもつ．このあとの事情は，こまの運動は，厳密にもとと同じ状態にもどることはけっしてない，ということを意味する．

問　　題

1. 慣性軸 x_3（または x_1）に近い軸のまわりの，こまの自由回転を論ぜよ．

解　x_3 軸が $\boldsymbol{M}$ の方向に近いとしよう．そうすると，成分 M_1 と M_2 の大きさは小さく，$M_3 \approx M$（1次の微小量のはんいで）である．同じ精度で，オイラーの運動方程式 (36.5) のはじめの2つは，

$$\frac{dM_1}{dt} = \left(1 - \frac{I_3}{I_2}\right)\Omega_0 M_2, \qquad \frac{dM_2}{dt} = \left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right)\Omega_0 M_1$$

という形に書かれる．ここで，$\Omega_0 = M/I_3$ という定数を導入した．一般のやり方にしたがって，M_1 および M_2 の解を $e^{i\omega t}$ に比例するとおくと，振動数 ω の値として

$$\omega = \Omega_0\sqrt{\left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right)\left(\frac{I_3}{I_2} - 1\right)} \tag{1}$$

が得られる．そして，M_1 および M_2 そのものに対しては

$$M_1 = Ma\sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\cos\omega t, \qquad M_2 = Ma\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1}\sin\omega t \tag{2}$$

を得る．ここに a は，任意の小さな定数である．これらの式によって，ベクトル $\boldsymbol{M}$ のこまに相対的な運動がきまる．図51についていえば，ベクトル $\boldsymbol{M}$ の終端は，x_3 軸上の極のまわりに（振動数 ω で）小さな楕円をえがく．

こまの空間内での絶対的な運動を求めるために，そのオイラー角を定めよう．この場合には，x_3 軸の Z 軸（$\boldsymbol{M}$ の方向）に対する傾きの角度 θ は小さく，(37.14) 式によって

$$\tan\psi = \frac{M_1}{M_2}, \qquad \theta^2 \approx 2(1 - \cos\theta) = 2\left(1 - \frac{M_3}{M}\right) \approx \frac{M_1^2 + M_2^2}{M^2}$$

である．(2) を代入して，

$$\tan\psi = \sqrt{\frac{I_1(I_3 - I_2)}{I_2(I_3 - I_1)}}\cot\omega t,$$

$$\theta^2 = a^2\left[\left(\frac{I_3}{I_2} - 1\right)\cos^2\omega t + \left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right)\sin^2\omega t\right] \tag{3}$$

を得る．角度 φ を計算するために，公式 (35.1) の3番目の式によって，$\theta \ll 1$ のとき

$$\Omega_0 \approx \Omega_3 \approx \dot{\psi} + \dot{\varphi}$$

であることに注目する．このことから

$$\varphi = \Omega_0 t - \psi \tag{4}$$

（任意の積分定数ははぶいてある）．

こまの3つの慣性軸（それらの方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3$ で表わそう）の方向の変化を直接追跡すれば，こまの運動のようすのより直観的な表象が得られる．ベクトル $\boldsymbol{n}_1$ および $\boldsymbol{n}_2$ は，XY 平面内で振動数 Ω_0 で一様に回転し，同時に，横方向に振動数 ω で小さな振動をおこなう．この振動は，ベクトル $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ の Z 成分によって与えられる．それは

$$n_{1Z} \approx \frac{M_1}{M} = a\sqrt{\frac{I_3}{I^2} - 1}\cos\omega t,$$

$$n_{2Z} \approx \frac{M_2}{M} = a\sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\sin\omega t$$

と書かれる．

ベクトル $\boldsymbol{n}_3$ に対しては，同じ精度で，

$$n_{3x} \approx \theta\sin\varphi, \qquad n_{3y} \approx -\theta\cos\varphi, \qquad n_{3z} \approx 1$$

となる（軸 X, Y, Z に対する $\boldsymbol{n}_3$ の方向の極角および方位角は，それぞれ $\theta, \varphi - \pi/2$ に等しい．139 ページの注意を見よ）．さらに，つぎのように書ける（式（37.13）を利用して）：

$$\begin{aligned} n_{3x} &= \theta\sin(\Omega_0 t - \psi) = \theta\sin\Omega_0 t\cos\psi - \theta\cos\Omega_0 t\sin\psi \\ &= \frac{M_2}{M}\sin\Omega_0 t - \frac{M_1}{M}\cos\Omega_0 t \\ &= a\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1}\sin\Omega_0 t\sin\omega t - a\sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\cos\Omega_0 t\cos\omega t, \end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned} n_{3x} = &-\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} + \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\right)\cos(\Omega_0 + \omega)t \\ &+ \frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} - \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\right)\cos(\Omega_0 - \omega)t. \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned} n_{3y} = &-\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} + \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\right)\sin(\Omega_0 + \omega)t \\ &+ \frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} - \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\right)\sin(\Omega_0 - \omega)t. \end{aligned}$$

これらから明らかなように，ベクトル $\boldsymbol{n}_3$ の運動は，振動数（$\Omega_0 \pm \omega$）の Z 軸のまわりの回転を重ね合わせたものである．

2. $M^2 = 2EI_2$ のときのこまの自由回転を論ぜよ．

解　この場合は，図51において，ベクトル $\boldsymbol{M}$ の終端が x_2 軸上の極を通る曲線にそって移動する場合に相当する．

方程式 (37.7) は

$$\frac{ds}{d\tau}=1-s^2, \qquad \tau=t\sqrt{\frac{(I_2-I_1)(I_3-I_2)}{I_1I_3}}\Omega_0, \qquad s=\frac{\Omega_2}{\Omega_0}$$

となる．ここに，$\Omega_0=M/I_2=2E/M$ という記号を導入した．この方程式を積分し，つぎに (37.6) 式を使うと

$$\Omega_1=\Omega_0\sqrt{\frac{I_2(I_3-I_2)}{I_1(I_3-I_1)}}\frac{1}{\cosh\tau},$$

$$\Omega_2=\Omega_0\tanh\tau,$$

$$\Omega_3=\Omega_0\sqrt{\frac{I_2(I_2-I_1)}{I_3(I_3-I_1)}}\frac{1}{\cosh\tau}$$

が得られる．

こまの絶対運動を記述するために，オイラーの角を導入し，θ を Z 軸（$\boldsymbol{M}$ の方向）とこまの慣性軸 x_2（本文でのように x_3 軸ではない）とのあいだの角度と定義する．それに応じて，ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ の成分をオイラー角に結びつける (37.14), (37.61) 式で，添字 1 2 3 を 3 1 2 と循環置換しなければならない．そうしてから，これらの式に表式 (1) を代入すると，

$$\cos\theta=\tanh\tau, \qquad \varphi=\Omega_0t+\text{const},$$

$$\tan\psi=\sqrt{\frac{I_3(I_2-I_1)}{I_1(I_3-I_2)}}$$

が得られる．

この式から，ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ は漸近的に（$t\to\infty$ のとき）x_2 軸に近づき，同時に後者は，漸近的に静止した Z 軸に近づくことが明らかになる．

§ 38.　剛体の接触

剛体の**つり合いの条件**は，運動方程式 (34.1), (34.3) から明らかなように，それに働く力および力のモーメントがゼロに等しいことである，と定式化できる：

$$\boldsymbol{F}=\sum\boldsymbol{f}=0, \qquad \boldsymbol{K}=\sum[\boldsymbol{rf}]=0. \tag{38.1}$$

ここで和は，物体に働くすべての外力についてとり，$\boldsymbol{r}$ は力の《作用点》の位置ベクトルである．このとき，モーメントの基準となる点（座標原点）は任意のやり方でえらぶことができる．$\boldsymbol{F}=0$ のとき，$\boldsymbol{K}$ の値はこの点のえらび方には依存しない（(34.5) を見よ）．

われわれの扱う系が，互いに接触したいくつかの剛体であれば，それがつり合っているときには，おのおのの剛体に対して条件（38.1）が満足されねばならない．そのようなときには，与えられた物体に，それと接触する他の物体からおよぼされる力をも勘定に入れなければならない．それらの力は物体どうしの接触点に働き，**抗力**とよばれる．いうまでもなく，2つの物体ごとに，それらのあいだの抗力は大きさ等しく，方向反対である．

一般の場合，抗力の大きさも方向も，すべての物体に対するつり合いの式（38.1）の系を連立方程式として解くことによって，求められる．けれども，ある場合には，抗力の方向は問題の条件だけからきまってしまう．たとえば，2つの物体が互いの表面を自由に滑ることができる場合には，それらのあいだの抗力は表面の法線方向をむいている．

接触した物体が互いに相対的に動くときには，抗力のほかに，散逸的な性質の力——**摩擦力**が生ずる．

接触した物体の運動には2つの型が可能である．すなわち，**滑り**と**ころがり**である．滑りの際には，抗力は接触面に垂直であるが，摩擦力は接触面にそう方向にある．

純粋のころがりは，接触点において相対運動がないということによって特徴づけられる．いいかえると，ころがっている物体は，各瞬間に接触点で固定されていると同様である．そして，抗力の方向は任意，すなわち，かならずしも接触面に垂直とは限らない．ころがりの際の摩擦は，ころがりをさまたげる付加的な力のモーメントとして作用する．

滑りの際の摩擦がまったく無視できるほど小さければ，物体の表面は**完全に滑らか**であるといわれる．反対に，物体の表面が，滑りなしのころがりだけを許し，ころがりの際の摩擦がまったく無視できるという性質をもつとき，その表面は《**完全に粗い**》といわれる．

これらの2つの場合には，物体の運動に対して摩擦力はおもてだった役割を演じないから，問題は純力学的なものになる．もし，摩擦の具体的なようすが運動にとって本質的であるならば，その運動はもはや純力学的な過程ではない（§25を見よ）．

物体どうしの接触があれば，その自由度の数は，自由な運動のときにくらべて減小する．これまで，そのような種類の問題を考察するときには，現実の自由度

の数に直接対応するような座標を導入することによって，そのような事情を表わしてきた．しかし，ころがりに対しては，そういう座標をえらぶことが不可能な場合もありうる．

ころがっている物体の運動に課せられる条件は，両物体の接触点の速度が等しいということである（たとえば，不動の表面を物体がころがるとき，接触点の速度はゼロでなければならない）．一般の場合，そのような条件は

$$\sum_i c_{\alpha i}\dot{q}_i = 0 \tag{38.2}$$

という形の《**拘束の式**》によって表わされる．ここに $c_{\alpha i}$ は座標だけの関数である（添字 α は拘束の式の番号を示す）．この式の左辺が，座標のある関数の時間についての完全導関数になっていないときには，この方程式は積分することができない．いいかえると，そのような拘束条件をいくつかの座標だけのあいだの関係に還元し，その関係を利用して，物体の位置を，現実の自由度の数に対応するより少数の座標によって表現するということは不可能なのである．このような拘束は**非ホロノーム**であるといわれる（逆に，系の座標だけで表わされる拘束は，**ホロノーム**とよばれる）．

例として，平たい面の上での球のころがりを考えよう．いつものように，$\boldsymbol{V}$ で並進運動の速度（球の中心の速度）を，$\boldsymbol{\Omega}$ で回転の角速度を表わそう．球の平面との接点の速度は，一般的な公式 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + [\boldsymbol{\Omega r}]$ において $\boldsymbol{r} = -a\boldsymbol{n}$ とおけば得られる（a は球の半径，$\boldsymbol{n}$ は，接触平面の接点にたてた法線の方向の単位ベクトルである）．求める拘束条件は，接点において滑りが存在しないことを表わす．したがって

$$\boldsymbol{V} - a[\boldsymbol{\Omega n}] = 0 \tag{38.3}$$

という式で与えられる．これは積分することができない．速度 $\boldsymbol{V}$ は球の中心の位置ベクトルの時間についての完全導関数であるけれども，しかし，角速度は一般にはいかなる座標の完全導関数でもない．したがって，拘束（38.3）は非ホロノームである[1]．

非ホロノームな拘束の式は座標の数をへらすのに使うことができないから，そ

1） 円柱のころがりに対する同様の拘束はホロノームであることに注意しよう．この場合，回転軸の空間内での方向はころがりによって変わらず，したがって，$\Omega = d\varphi/dt$ は，円柱の自分の軸のまわりの回転角 φ の完全導関数である．このとき拘束（38.3）は積分できて，慣性中心の座標と角度 φ とのあいだの関係を与える．

のような拘束が存在するときには，すべてが独立とはいえない座標を使うことが避けられない．この場合に対応するラグランジュ方程式をつくるには，あらためて最小作用の原理にまでもどらなければならない．

(38.2) の形の拘束があると，座標の変分の可能な値に対して一定の制限が課せられる．すなわち，この式に δt をかけてみると，変分 δq_i は独立でなく，

$$\sum_i c_{\alpha i}\delta q_i = 0 \tag{38.4}$$

という関係式で互いに結ばれていることがわかる．この事情を，作用の変分の際に考慮しなければならない．条件付き極値を見いだすためのラグランジュの一般的な方法にしたがって，作用の変分

$$\delta S = \int \sum_i \delta q_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) dt$$

の積分記号下の表式に，(38.4) 式に不定乗数（座標の関数）λ_α をかけたものを加え，そのうえで，積分がゼロになることを要求する．こうすると，すべての変分 δq_i を独立とみなすことができて，

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_\alpha \lambda_\alpha c_{\alpha i} \tag{38.5}$$

が得られる．これらは拘束の式 (38.2) とともに，未知量 q_i および λ_α に対する方程式の完全な系を構成する．

上に説明した方法では，抗力はまったくおもてに現われない．物体の接触は，拘束の式のなかに完全に考慮に入れられている．しかし，接触のある物体の運動方程式をつくりあげる別の方法もあって，それによれば，抗力があからさまに導入される．この方法（いわゆる**ダランベールの原理**の内容がそれである）の要点は，接触している物体のおのおのに対して

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \sum \boldsymbol{f}, \qquad \frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = \sum[\boldsymbol{r}\boldsymbol{f}] \tag{38.6}$$

という式を書き，物体に働く力 $\boldsymbol{f}$ に抗力をも含めるということである．それらの抗力ははじめは未知であり，方程式を解くことによって物体の運動とともにきまるのである．この方法は，ホロノームな拘束にも，非ホロノームな拘束にも同じように適用することができる．

問　題

1. 外力 $\boldsymbol{F}$ および力のモーメント $\boldsymbol{K}$ のもとで平面上をころがる一様な球の運動方程式

を，ダランベールの原理を使って見いだせ．

解 拘束の式 (38.3) はすでに本文中に与えられている． 球の平面との接点に働く抗力 ($\boldsymbol{R}$ で表わす) を導入して方程式 (38.6) を書きおろすと，

$$\mu\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}, \qquad (1)$$

$$I\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \boldsymbol{K} - a[\boldsymbol{n}\boldsymbol{R}] \qquad (2)$$

となる (ここで，$\boldsymbol{P} = \mu\boldsymbol{V}$ であり，球状こまに対して $\boldsymbol{M}=I\boldsymbol{\Omega}$ であることを考慮に入れた)．拘束の式 (38.3) を時間について微分して，

$$\dot{\boldsymbol{V}} = a[\dot{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{n}]$$

を得る．これを式 (1) に代入し，(2) を利用して $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ を消去すると，抗力と $\boldsymbol{F}$ および $\boldsymbol{K}$ とを結びつける方程式

$$\frac{I}{a\mu}(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}) = [\boldsymbol{K}\boldsymbol{n}] - a\boldsymbol{R} + a\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{R})$$

が得られる．この方程式を成分に分けて書き，$I = \frac{2}{5}\mu a^2$ (§32 の問題 2b を見よ) とおくと，

$$R_x = \frac{5}{7a}K_y - \frac{2}{7}F_x, \qquad R_y = -\frac{5}{7a}K_x - \frac{2}{7}F_y, \qquad R_z = -F_z$$

を得る (ころがりの面を xy 面にとる)．最後にこれらの表式を (1) に代入すると，与えられた外力とモーメントだけを含む運動方程式が得られる：

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{5}{7\mu}\left(F_x + \frac{K_y}{a}\right), \qquad \frac{dV_y}{dt} = \frac{5}{7\mu}\left(F_y - \frac{K_x}{a}\right).$$

角速度の成分 Ω_x, Ω_y は，拘束の式 (38.3) の助けをかりて V_x と V_y とで表わすことができる．Ω_z に対しては，

$$\frac{2}{5}\mu a^2\frac{d\Omega_z}{dt} = K_z$$

という方程式がなりたつ (式 (2) の z 成分)．

2. 重さ P，長さ l の一様な棒 BD が，図 52 に示すように壁にたてかけてある．棒の下端 B は糸 AB で支えられている．支点に働く抗力と糸の張力とを求めよ．

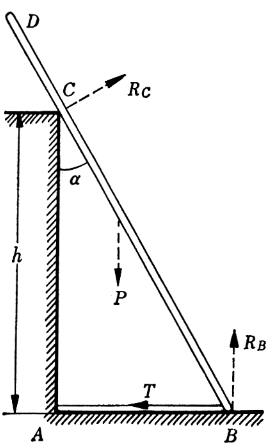


図 52

解 棒の重さは，その中央に働く鉛直下向きの力 P で表わされる．抗力 R_B および R_C の方向は，それぞれ，鉛直上向きおよび棒に垂直である．糸の張力 T は

BからAにむかう．つり合いの式を解いて

$$R_C = \frac{Pl}{4h}\sin 2\alpha, \qquad R_B = P - R_C \sin\alpha, \qquad T = R_C \cos\alpha$$

を得る．

3.　重さPの棒ABが，その両端を水平面および鉛直面にもたせかけ，２本の水平な糸ADおよびBCによってその位置にたもたれている（図53）．糸BCは，棒ABと同一の平面（鉛直面）のなかにある．支点に働く抗力と糸の張力を求めよ．

解　糸の張力T_AおよびT_Bは，それぞれAからD, BからCへむかう．抗力R_AおよびR_Bはそれぞれの平面に垂直である．つり合いの式を解いて，

$$R_B = P, \qquad T_B = \frac{P}{2}\cot\alpha, \qquad R_A = T_B \sin\beta, \qquad T_A = T_B \cos\beta$$

が得られる．

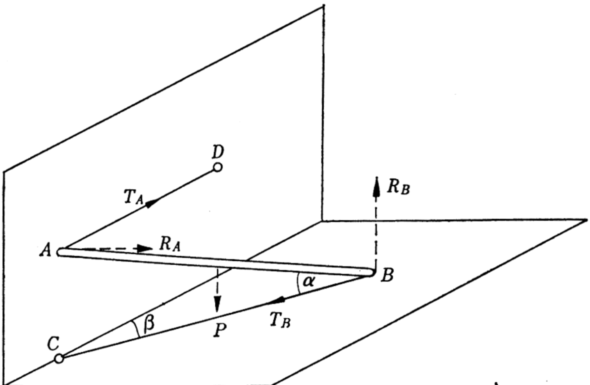


図　53

4.　２本の長さlの棒が，上端をピンで接合され，下端を糸ABによって結びつけられている（図54）．一方の棒の中点に力Fが働く（棒の重さは無視する）．抗力を求めよ．

解　糸の張力Tは，Aに働くものはAからBにむかい，Bに働くものはBからAにむかう．点AおよびBに働く抗力R_A, R_Bは支えの面に垂直である．接合点において棒ACに働く抗力を$\boldsymbol{R}_C$で表わすと，棒BCには抗力$-\boldsymbol{R}_C$が働く．棒BCに働く力$\boldsymbol{R}_B$, T, $-\boldsymbol{R}_C$

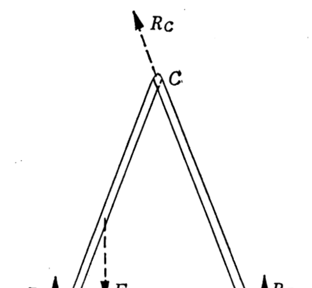


図　54

のモーメントの和がゼロになるというつり合いの条件によって，ベクトル $\boldsymbol{R}_C$ の方向は BC にそうという結果が得られる． 残りのつり合いの条件（2つの棒のおのおのに対する）から，

$$R_A=\frac{3}{4}F,\qquad R_B=\frac{F}{4},\qquad R_C=\frac{F}{4\sin\alpha},\qquad T=\frac{1}{4}F\cot\alpha$$

という値が得られる．ここに α は角度 CAB である．

§ 39.　非慣性基準系における運動

これまで任意の力学系の運動を考察するのに，われわれはいつも慣性基準系に関係させて扱ってきた．慣性基準系においてのみ，たとえば外場のなかにある1個の粒子のラグランジアンは

$$L_0=\frac{m\boldsymbol{v}_0^2}{2}-U \tag{39.1}$$

という形をとり，それに対応して運動方程式が

$$m\frac{d\boldsymbol{v}_0}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}$$

となる（この節では，慣性基準系に関係づけた量に添字0をつけて区別する）．

そこで，非慣性基準系における粒子の運動方程式はどんなものであるかという問題を考えよう．この問題を解くための出発点はふたたび最小作用の原理である．この原理の適用範囲は，基準系のえらび方によって制限されないのである．この原理とともに，ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} \tag{39.2}$$

も効力を失わない．しかし，ラグランジアンはもはや（39.1）の形をもたない．それを見いだすためには，関数 L_0 に適当な変換をほどこすことが必要である．

その変換は2段に分けておこなう．まず，慣性系 K_0 に対して速度 $\boldsymbol{V}(t)$ で並進運動をする基準系 K' を考える．系 K_0 および K' に関する粒子の速度 $\boldsymbol{v}_0$ および $\boldsymbol{v}'$ のあいだには，

$$\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{V}(t) \tag{39.3}$$

という関係がある．これを（39.1）に代入して，K' 系のラグランジアン

$$L'=\frac{m\boldsymbol{v}'^2}{2}+m\boldsymbol{v}'\boldsymbol{V}+\frac{m}{2}\boldsymbol{V}^2-U$$

を得る．ところで，$V^2(t)$ は時間の与えられた関数であり，別のある時間の関数

の t についての完全導関数として表わすことができる．したがって，上の表式の第３項はおとすことができる．さらに，座標系 K' における，粒子の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}'$ とすれば，$\boldsymbol{v}'=d\boldsymbol{r}'/dt$ である．ゆえに，

$$m\boldsymbol{V}(t)\boldsymbol{v}'=m\boldsymbol{V}\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}=\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{V}\boldsymbol{r}')-m\boldsymbol{r}'\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}.$$

これをラグランジアンに代入し，ふたたび時間の完全導関数をおとすと，結局

$$L'=\frac{m'v^2}{2}-m\boldsymbol{W}(t)\boldsymbol{r}'-U \tag{39.4}$$

が得られる．ここに $\boldsymbol{W}=d\boldsymbol{V}/dt$ は基準系 K' の並進運動の加速度である．

(39.4) を使ってラグランジュ方程式をつくると，

$$m\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}'}-m\boldsymbol{W}(t) \tag{39.5}$$

が得られる．

基準系の並進運動の加速度が粒子の運動方程式に与える影響は，一様な力の場があることと同等であり，この場のなかで働く力は粒子の質量と加速度 $\boldsymbol{W}$ との積に等しく，この加速度の方向と逆の方向をもつということがわかる．

つぎに，系 K' と原点を共有し，K' に対して角速度 $\boldsymbol{\Omega}(t)$ で回転するもう１つの基準系Kを導入する．慣性系 K_0 に対しては，K は並進運動と回転運動とをおこなう．

系 K' に関する粒子の速度 $\boldsymbol{v}'$ は，系Kに関する速度 $\boldsymbol{v}$ と，系 K といっしょにおこなう回転の速度 $[\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{r}]$ とからできている：

$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}+[\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{r}]$$

(系Kおよび K' における粒子の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ とは一致する)．この表現をラグランジアン (39.4) に代入すると

$$L=\frac{mv^2}{2}+m\boldsymbol{v}[\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{r}]+\frac{m}{2}[\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{r}]^2-m\boldsymbol{W}\boldsymbol{r}-U \tag{39.6}$$

を得る．

これが，任意の非慣性座標系における粒子のラグランジアンである．基準系の回転は，ラグランジアンのなかに特別の形をした――粒子の速度について１次の――項を出現させることに注意しよう．

ラグランジュ方程式に入ってくる導関数を計算するために，完全微分

$$dL = m\boldsymbol{v}d\boldsymbol{v} + md\boldsymbol{v}[\boldsymbol{\Omega r}] + m\boldsymbol{v}[\boldsymbol{\Omega}d\boldsymbol{r}] + m[\boldsymbol{\Omega r}][\boldsymbol{\Omega}d\boldsymbol{r}] - m\boldsymbol{W}d\boldsymbol{r} - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}d\boldsymbol{r}$$

$$= m\boldsymbol{v}d\boldsymbol{v} + md\boldsymbol{v}[\boldsymbol{\Omega r}] + md\boldsymbol{r}[\boldsymbol{v\Omega}] + m[[\boldsymbol{\Omega r}]\boldsymbol{\Omega}]d\boldsymbol{r} - m\boldsymbol{W}d\boldsymbol{r} - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}d\boldsymbol{r}$$

を書きおろす.

$d\boldsymbol{v}$ および $d\boldsymbol{r}$ を含む項をまとめて,

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = m\boldsymbol{v} + m[\boldsymbol{\Omega r}],$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = m[\boldsymbol{v\Omega}] + m[[\boldsymbol{\Omega r}]\boldsymbol{\Omega}] - m\boldsymbol{W} - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}$$

を得る. これらの表式を (39.2) に入れて, 求める運動方程式が得られる:

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} - m\boldsymbol{W} + m[\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{\Omega}}] + 2m[\boldsymbol{v\Omega}] + m[\boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{r\Omega}]]. \quad (39.7)$$

基準系の回転によって生ずる《慣性力》は, 3つの部分からできていることがわかる. $m[\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{\Omega}}]$ という力は回転の不均一さに結びついているが, 他の2つは回転が一様なときにも存在する. $2m[\boldsymbol{v\Omega}]$ という力は**コリオリの力**とよばれる. 以前に考察した (散逸的でない) 力のいずれともことなって, この力は粒子の速度に依存する. $m[\boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{r\Omega}]]$ という力は**遠心力**とよばれる. その方向は, $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{\Omega}$ とできまる平面内にあって, 回転軸 (すなわち $\boldsymbol{\Omega}$ の方向) に垂直であり, 軸から外へむく. この力の大きさは, 粒子の回転軸からの距離を ρ とすると $m\rho\Omega^2$ に等しい.

座標の一様な回転運動だけで並進運動はないという特別の場合を考えよう. (39.6) および (39.7) で $\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{const}$, $\boldsymbol{W} = 0$ とおくと, ラグランジアン

$$L = \frac{mv^2}{2} + m\boldsymbol{v}[\boldsymbol{\Omega r}] + \frac{m}{2}[\boldsymbol{\Omega r}]^2 - U, \quad (39.8)$$

および運動方程式

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} + 2m[\boldsymbol{v\Omega}] + m[\boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{r\Omega}]] \quad (39.9)$$

が得られる.

この場合の粒子のエネルギーを計算しよう.

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = m\boldsymbol{v} + m[\boldsymbol{\Omega r}] \quad (39.10)$$

を $E = \boldsymbol{pv} - L$ に代入すれば,

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}[\boldsymbol{\Omega r}]^2 + U \qquad (39.11)$$

が得られる．エネルギーのなかには，速度について1次の項がないことに注意しよう．エネルギーに与える基準系の回転の影響は，粒子の座標にのみ依存し，角速度の2乗に比例する項が付加されることである．この付加されたポテンシャル・エネルギー $-\frac{m}{2}[\boldsymbol{\Omega r}]^2$ は**遠心エネルギー**とよばれる．

一様に回転している基準系に対する粒子の速度 $\boldsymbol{v}$ は，この基準系の慣性系 K_0 に対する速度 $\boldsymbol{v}_0$ と

$$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v} + [\boldsymbol{\Omega r}] \qquad (39.12)$$

という関係で結ばれる．したがって，系 K での粒子の運動量 $\boldsymbol{p}$ (39.10) は，系 K_0 におけるその運動量 $\boldsymbol{p}_0 = m\boldsymbol{v}_0$ と一致することになる．同時に，角運動量 $\boldsymbol{M}_0 = [\boldsymbol{r p}_0]$ と $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{rp}]$ も一致する．粒子のエネルギーは，系 K と K_0 とでことなる．(39.12) の $\boldsymbol{v}$ を (39.11) に代入すると，

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - m\boldsymbol{v}_0[\boldsymbol{\Omega r}] + U = \frac{mv_0^2}{2} + U - m[\boldsymbol{r v}_0]\boldsymbol{\Omega}$$

が得られる．はじめの2つの項は系 K_0 におけるエネルギー E_0 である．最後の項に角運動量を導入して，

$$E = E_0 - \boldsymbol{M\Omega} \qquad (39.13)$$

を得る．

この公式によって，一様に回転する座標系へ移る際のエネルギーの変換規則がきまる．われわれはこの式を1個の粒子に対して導いたのであるが，しかし，この結論は任意個の粒子の系にまでただちに一般化することができ，同じ公式 (39.13) が得られることは明らかであろう．

問　題

1. 自由落下する物体が，地球の自転（その角速度は小さいとみなす）によって鉛直方向からそらされる大きさを見いだせ．

解　重力場では，重力の加速度ベクトルを $\boldsymbol{g}$ として $U = -m\boldsymbol{gr}$ である．方程式 (39.9) で，$\boldsymbol{\Omega}$ の2乗に比例する遠心力を無視すると，運動方程式は，

$$\dot{\boldsymbol{v}} = 2[\boldsymbol{v\Omega}] + \boldsymbol{g}. \qquad (1)$$

この方程式を逐次近似によって解くのであるが，そのために $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ とおく．ここに $\boldsymbol{v}_1$ は方程式 $\dot{\boldsymbol{v}}_1 = \boldsymbol{g}$ の解，すなわち $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{g}t + \boldsymbol{v}_0$ である ($\boldsymbol{v}_0$ は初速度)．$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ を

(1) に代入し，右辺では $\boldsymbol{v}_1$ だけを残すと，$\boldsymbol{v}_2$ に対する方程式

$$\dot{\boldsymbol{v}}_2 = 2[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{\Omega}] = 2t[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\Omega}] + 2[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\Omega}]$$

が得られる．これを積分して

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{\boldsymbol{g}t^2}{2} + \frac{t^3}{3}[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\Omega}] + t^2[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\Omega}] \tag{2}$$

を得る．ただし，$\boldsymbol{h}$ は粒子の最初の位置ベクトルである．

z 軸を鉛直上向きに，x 軸を子午線にそって極へむかう方向にとる．すると

$$g_x = g_y = 0, \qquad g_z = -g; \qquad \Omega_x = \Omega\cos\lambda, \qquad \Omega_y = 0, \qquad \Omega_z = \Omega\sin\lambda$$

である．ここに λ は緯度である（はっきりさせるために，仮りに北緯であるとしておこう）．(2) で $\boldsymbol{v}_0 = 0$ とおくと

$$x = 0, \qquad y = -\frac{t^3}{3}g\Omega\cos\lambda$$

が得られる．ここで落下時間を $t \approx \sqrt{2h/g}$ でおきかえると，結局

$$x = 0, \qquad y = -\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} g\Omega\cos\lambda$$

が見いだされる（y の符号が負であることは，東へそれることに対応する）．

2. 地球表面から初速度 $\boldsymbol{v}_0$ で投げ出された物体の軌跡の平面からのずれを求めよ．

解 xz 面を，速度 $\boldsymbol{v}_0$ がそのなかにあるようにえらぶ．はじめの高さは $\boldsymbol{h} = 0$ である．側方へのずれは (2)（問題1の）から

$$y = -\frac{t^3}{3}g\Omega_x + t^2(\Omega_x v_{0z} - \Omega_z v_{0x}),$$

あるいは，飛行時間 $t \approx 2v_{0z}/g$ を代入して

$$y = \frac{4v_{0z}^2}{g^2}\left(\frac{1}{3}v_{0z}\Omega_x - v_{0x}\Omega_z\right).$$

3. 地球の自転が振子の小振動におよぼす影響を見いだせ（いわゆる**フーコー振子**）．

解 振子の鉛直方向の変位は2次の微小量として無視すれば， 物体の運動は水平面 xy のなかでおこなわれるとみなすことができる．Ω^2 を含む項をおとして，運動方程式を

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\Omega_z\dot{y}, \qquad \ddot{y} + \omega^2 y = -2\Omega_z\dot{x}$$

の形に書く．ただし，ω は地球の自転を考察に入れない場合の振子の振動数である． 第2の式に i をかけて第1の式に加えると，複素量 $\xi = x + iy$ に対するただ1つの式

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega_z\dot{\xi} + \omega^2\xi = 0$$

を得る．$\Omega_z \ll \omega$ のときこの方程式の解は，

$$\xi = e^{-i\Omega_z t}(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t})$$

という形をもつ．あるいは，

$$x + iy = e^{-i\Omega_z t}(x_0 + iy_0).$$

ここに $x_0(t), y_0(t)$ は，地球の自転を考慮に入れないときの振子の軌跡を与える関数である．したがって，地球の自転の影響は，この軌跡を鉛直方向のまわりに角速度 Ω_z で回転させることに帰する．

第7章　正　準　方　程　式

§ 40.　ハミルトン方程式

ラグランジアン（およびそれから導かれるラグランジュ方程式）による力学法則の定式化は，一般座標と一般速度を与えることによって系の力学的状態を記述するということを前提にしている．このような記述は唯一の可能性ではない．系の一般座標と一般運動量とによる記述は，とくに，力学の一般的問題の研究の際に多くの優れた点を示す．そこで力学のそのような定式化に対応する運動方程式を求めることが問題となる．

一組の独立変数から他の一組の独立変数への移行は，数学においてルジャンドル変換として知られている変換によっておこなわれる．いまの場合は，つぎのことに帰着する．

座標と速度の関数としてのラグランジアンの完全微分は

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i.$$

導関数 $\partial L/\partial \dot{q}_i$ は定義により一般運動量に等しく，またラグランジュ方程式によって $\partial L/\partial q_i = \dot{p}_i$ であるから，上の式は

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i \tag{40.1}$$

の形に書ける．

(40.1) の第2項を

$$\sum p_i d\dot{q}_i = d(\sum p_i \dot{q}_i) - \sum \dot{q}_i dp_i$$

の形に書き，全微分 $d(\sum p_i \dot{q}_i)$ を左辺に移項して，全体の符号を変えれば，(40.1) から

$$d(\sum p_i \dot{q}_i - L) = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i$$

を得る．

微分記号の下にある量は，系のエネルギーを表わしている（§6を見よ）．それが座標と運動量とで表わされているとき，系の**ハミルトニアン**とよばれる：

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i\dot{q}_i - L. \tag{40.2}$$

微分式

$$dH = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i \tag{40.3}$$

（座標と運動量とが独立変数である）から，つぎの方程式が得られる．

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{40.4}$$

これが求める変数 p と q とで書かれた方程式であり，**ハミルトン方程式**とよばれている．ラグランジュの方法のときの s 個の2階微分方程式の代わりに，この方程式系は，$2s$ 個の未知関数 $p(t)$, $q(t)$ についての $2s$ 個の1階微分方程式の組から成立している．その形式的な簡単さと対称性とのために，**正準方程式**とよばれる．

ハミルトニアンの時間についての完全導関数は，

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i.$$

ここで $\dot{q}_i$ および $\dot{p}_i$ に方程式（40.4）を代入すれば，後の2項は互いにうちけしあって

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{40.5}$$

となる．とくにハミルトニアンが時間に陽に依存しないときには $dH/dt = 0$, すなわちふたたびエネルギーの保存法則を得る．

ラグランジアンあるいはハミルトニアンが，力学変数 $q, \dot{q}$ あるいは q, p のほかにいろいろなパラメター——力学系自身あるいは系に作用する外部の場の性質を特徴づける量——を含むことがある．それらのパラメターの1つを λ とする．これを変量とみなすことによって，（40.1）の代わりに

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda}d\lambda.$$

さらに（40.3）の代わりには

$$dH = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda}d\lambda$$

を得る．したがって

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{\dot{q},q}. \tag{40.6}$$

この関係は，パラメーターλについてのラグランジアンの偏導関数とハミルトニアンの偏導関数とのあいだを結ぶものである；導関数についている添字はハミルトニアンの場合にはpとqを定数として，ラグランジアンの場合にはqと$\dot{q}$とを定数として，微分すべきことをしめしている．

この結論を，ほかの形で表わすこともできる．ラグランジアンを$L = L_0 + L'$であるとする．L'はもともとの関数L_0に付加された小さな項を表わす．それに対応するハミルトニアン$H = H_0 + H'$の付加項はL'とつぎの関係をもつ：

$$(H')_{p,q} = -(L')_{\dot{q},q}. \tag{40.7}$$

(40.1) から (40.3) への変換で，ラグランジアンが時間に陽に依存する場合には必要なdtのついた項を書かなかった．その理由は，時間はいまの場合単なるパラメーターの役をはたすだけで，導こうとしている変換には関係がないからである．LおよびHの時間についての偏導関数は (40.6) と同じ関係

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{\dot{q},q} \tag{40.8}$$

で結ばれる．

問　題

1.　1個の質点のハミルトニアンを，それぞれデカルト座標，円柱座標，球座標で求めよ．

解　デカルト座標x, y, zでは

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z).$$

円柱座標r, φ, zでは

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2\right) + U(r, \varphi, z).$$

球座標r, θ, φでは

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + U(r, \theta, \varphi).$$

2.　一様に回転している基準系で質点のハミルトニアンを求めよ．

解　(39.11) および (39.10) により

$$H = \frac{p^2}{2m} - \boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{rp}] + U.$$

3.　質量Mの1質点と質量mのn個の質点とからなる系のハミルトニアンを，慣性中心の運動を消去した形で，求めよ（§ 13 についている問題を見よ）．

解 エネルギーEは，§13 の問題におけるラグランジアンから，Uの前の符号を変えることによって，求められる．一般運動量は

$$\boldsymbol{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = m\boldsymbol{v}_a - \frac{m^2}{\mu}\sum_a \boldsymbol{v}_a.$$

したがって

$$\sum \boldsymbol{p}_a = m\sum \boldsymbol{v}_a - \frac{nm^2}{\mu}\sum \boldsymbol{v}_a = \frac{mM}{\mu}\sum \boldsymbol{v}_a, \qquad \boldsymbol{v}_a = \frac{\boldsymbol{p}_a}{m} + \frac{1}{M}\sum \boldsymbol{p}_a.$$

E に代入して，

$$H = \frac{1}{2m}\sum_a \boldsymbol{p}_a^2 + \frac{1}{2M}\left(\sum_a \boldsymbol{p}_a\right)^2 + U.$$

§ 41. ラウス関数

ある場合には，新しい変数への移行の際に，すべての一般速度を運動量に変えてしまわずに，その一部分を変えるほうが目的にかなっていることがある．対応する変換は前節に示したのとまったく同じである．

簡単のために，はじめはすべてで2つの座標をもっていると仮定する．それらを q および ξ と書く．そして変数 $q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi}$ から変数 $q, \xi, p, \dot{\xi}$ への変換を行なおう（pはqに対応する一般運動量）．

ラグランジアン $L(q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi})$ の微分は

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q}dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi}$$
$$= \dot{p}dq + pd\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi}.$$

したがって

$$d(L - p\dot{q}) = \dot{p}dq - \dot{q}dp + \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi}.$$

関数（**ラウス関数**といわれる）

$$R(q, p, \xi, \dot{\xi}) = p\dot{q} - L \tag{41.1}$$

を導入しよう．ここで速度$\dot{q}$は等式 $p = \partial L/\partial \dot{q}$ によって運動量pで表わされている．その微分は

$$dR = -\dot{p}dq + \dot{q}dp - \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi}, \tag{41.2}$$

したがって

$$\dot{q} = \frac{\partial R}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial R}{\partial q}, \tag{41.3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = -\frac{\partial R}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} \tag{41.4}$$

がなりたつ．（41.4）の等式を座標ξについてのラグランジュ方程式に代入することにより

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial R}{\partial \xi}. \tag{41.5}$$

このように，ラウス関数は座標qについてはハミルトニアン（方程式（41.3））であり，座標ξについてはラグランジアン（方程式（41.5））になっている．

一般的な定義により，系のエネルギーは

$$E = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{\xi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - L = p\dot{q} + \dot{\xi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - L$$

である．これのラウス関数による表現は，（41.1）および（41.4）を代入することによって得られる．

$$E = R - \dot{\xi}\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}. \tag{41.6}$$

上に得た式を，座標qおよびξがいくつかある場合へ一般化することは容易である．

ラウス関数を利用することは，とくに循環座標が存在するときに有用である．座標qが循環的であるとすると，それらはラグランジアンに陽には含まれておらず，したがってまたラウス関数にも陽に含まれない．したがって，ラウス関数は$p, \xi, \dot{\xi}$だけの関数となる．一方，循環座標に対応する運動量pは定数である（これは方程式（41.3）の第2式からでてくる．この意味ではこの式は新しいものではない）．運動量pに，与えられた定数の値を代入すると，方程式（41.5）

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R(p, \xi, \dot{\xi})}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial R(p, \xi, \dot{\xi})}{\partial \xi}$$

は座標ξだけを含む方程式に変わってしまう．したがって循環座標は完全に消去される．この方程式を解いて関数 $\xi(t)$ が求められれば，それを方程式

$$\dot{q} = \frac{\partial R(p, \xi, \dot{\xi})}{\partial p}$$

の右辺に代入する．これを直接積分することによって関数 $q(t)$ が求められる．

問 題

外場 $U(\varphi,\theta)$ のもとにある対称こまのラウス関数を，循環座標 ψ を消去した形に求めよ（ψ,φ,θ はオイラーの角度）.

解 ラグランジアンは

$$L=\frac{I_1'}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{I_3}{2}(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)^2-U(\varphi,\theta)$$

（§ 35 の問題 1 を見よ）. ラウス関数は

$$R=p_\psi\dot{\psi}-L=\frac{p_\psi^2}{2I_3}-p_\psi\dot{\varphi}\cos\theta-\frac{I_1'}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+U(\varphi,\theta)\,;$$

この表式の第 1 項は定数であり，除くことができる.

§ 42. ポアッソンの括弧式

$f(p,q,t)$ を，座標，運動量および時間の，ある関数とする．それの時間についての完全導関数をつくる：

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k\right).$$

ここで $\dot{q}_k$ および $\dot{p}_k$ の代わりに，そのハミルトン方程式（40. 4）による表現を代入して

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\{Hf\} \tag{42.1}$$

を得る．ここで

$$\{Hf\}=\sum_k\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k}-\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right) \tag{42.2}$$

という記号を導入した．表式（42. 2）は，量 H と f に対する**ポアッソンの括弧式**とよばれる.

力学変数の関数で系の運動のあいだ不変にとどまる量は，すでに知っているように，運動の積分とよばれる.（42. 1）から，量 f が運動の積分である（$df/dt=0$）ための条件が

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\{Hf\}=0 \tag{42.3}$$

の形に書けることがわかる．運動の積分が時間に陽によらない場合には，

$$\{Hf\}=0, \tag{42.4}$$

すなわち，その量とハミルトニアンとのポアッソンの括弧式がゼロにならなければならない.

任意の1対の量fとgに対しても，ポアッソンの括弧式は（42.2）と同様に定義される：

$$\{fg\}=\sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}-\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}\right). \tag{42.5}$$

ポアッソンの括弧式は，その定義から容易に導かれるつぎのような性質をもっている．

関数の順序を入れかえると，括弧式は符号を変える；関数のうち一方が定数（c）であれば，括弧式はゼロになる：

$$\{fg\}=-\{gf\}, \tag{42.6}$$

$$\{fc\}=0. \tag{42.7}$$

さらに，

$$\{f_1+f_2,g\}=\{f_1g\}+\{f_2g\}, \tag{42.8}$$

$$\{f_1f_2,g\}=f_1\{f_2g\}+f_2\{f_1g\}. \tag{42.9}$$

（42.5）の時間に関する偏導関数をつくると，

$$\frac{\partial}{\partial t}\{fg\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t}g\right\}+\left\{f\frac{\partial g}{\partial t}\right\}. \tag{42.10}$$

関数fあるいはgのうち1つが，運動量あるいは座標のうちの1つと一致しているときには，ポアッソンの括弧式は単に偏導関数になる：

$$\{fq_k\}=\frac{\partial f}{\partial p_k}, \tag{42.11}$$

$$\{fp_k\}=-\frac{\partial f}{\partial q_k}. \tag{42.12}$$

たとえば公式（42.11）は（42.5）において $g=q_k$ とおいて得られる；このとき $\frac{\partial q_k}{\partial q_l}=\delta_{kl}$, $\frac{\partial q_k}{\partial p_l}=0$ であるから，和はただ1つの項になってしまう．とくに（42.11）および（42.12）において関数fをq_iおよびp_iに等しいとおけば，

$$\{q_iq_k\}=0,\qquad \{p_ip_k\}=0,\qquad \{p_iq_k\}=\delta_{ik}. \tag{42.13}$$

3つの関数からつくられるポアッソンの括弧式のあいだにはつぎのような関係がある：

$$\{f\{gh\}\}+\{g\{hf\}\}+\{h\{fg\}\}=0. \tag{42.14}$$

これは**ヤコービの恒等式**とよばれる．

その証明のために，つぎのことに注目しよう．定義（42.5）によればポアッソンの括弧式 $\{fg\}$ は量 f,g の1階導関数についての双1次の同次式である．し

たがって，たとえば括弧式 $\{h\{fg\}\}$ は f, g の2階導関数についての1次の同次式である．等式 (42.14) の左辺全体としても，すべての関数 f, g, h の2階導関数についての1次の同次式である．f の2階導関数だけをひとまとめにしよう．第1の括弧式はそのような項を含んでいない——そのなかには f の1階の導関数だけがある．第2および第3の括弧式の和を，つぎのような微分演算子 D_1, D_2 を導入し，シンボリックな形に書きなおす：

$$D_1(\varphi) = \{g\varphi\}, \qquad D_2(\varphi) = \{h\varphi\}.$$

そうすれば

$$\{g\{hf\}\} + \{h\{fg\}\} = \{g\{hf\}\} - \{h\{gf\}\}$$
$$= D_1(D_2(f)) - D_2(D_1(f)) = (D_1D_2 - D_2D_1)f.$$

ところが一方，線形微分演算子のこのような組み合わせが f の2階導関数を含むことはできないということが容易に示される．実際，線形微分演算子のもっとも一般的な形は

$$D_1 = \sum_k \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad D_2 = \sum_k \eta_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

である．ここで ξ_k, η_k は変数 $x_1, x_2 \cdots$ の任意の関数である．このとき

$$D_1D_2 = \sum_{k,l} \xi_k \eta_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k,l} \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

$$D_2D_1 = \sum_{k,l} \eta_k \xi_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k,l} \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l}$$

であり，これらの積の差は

$$D_1D_2 - D_2D_1 = \sum_{k,l} \left(\xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_l}$$

であって，これらもまた1階の微分操作だけを含む演算子である．このように等式 (42.14) の左辺において，f の2階導関数をもつすべての項がたがいにうちけしあっている．まったく同じことが関数 g および h についてなりたっているから，表式全体が恒等的にゼロに帰する．

ポアッソンの括弧式の重要な性質は，もし f と g とが2つの運動の積分であると，これらからつくった括弧式もまた運動の積分になる：

$$\{fg\} = \text{const}, \tag{42.15}$$

という点にある（**ポアッソンの定理**といわれる）．

この証明は，f および g が時間に陽によらないときにはきわめて簡単である．

ヤコービの恒等式で $h=H$ とおくと

$$\{H\{fg\}\}+\{f\{gH\}\}+\{g\{Hf\}\}=0.$$

したがって，$\{Hg\}=0$ かつ $\{Hf\}=0$ であるならば $\{H\{fg\}\}=0$，すなわち定理は証明された．

運動の積分 f および g が時間に陽によるときには，（42.1）によって

$$\frac{d}{dt}\{fg\}=\frac{\partial}{\partial t}\{fg\}+\{H\{fg\}\}.$$

公式（42.10）をもちい，また括弧式 $\{H\{fg\}\}$ をヤコービの恒等式をもちいて書きかえると，

$$\frac{d}{dt}\{fg\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t}g\right\}+\left\{f\frac{\partial g}{\partial t}\right\}-\{f\{gH\}\}-\{g\{Hf\}\}$$

$$=\left\{\frac{\partial f}{\partial t}+\{Hf\},\ g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}+\{Hg\}\right\},$$

あるいは

$$\frac{d}{dt}\{fg\}=\left\{\frac{df}{dt}g\right\}+\left\{f\frac{dg}{dt}\right\} \tag{42.16}$$

を得る．したがって，一般の場合にもポアッソンの定理は証明された．

もちろん，われわれはポアッソンの定理をもちいた結果として，いつでも新しい運動の積分を得るわけではない．その数はもともと制限されている（s を自由度として $2s-1$ 個）のであるから，これは明らかである．ある場合には意味のない結果——ポアッソンの括弧式が定数である——であったり，ある場合にはもとの積分 f, g の単なる関数であったりするだろう．どちらの場合でもないなら，ポアッソンの括弧式は新しい運動の積分を与える．

問　　題

1.　質点の運動量 $\boldsymbol{p}$ のデカルト成分と角運動量 $\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{rp}]$ のデカルト成分とから構成されるポアッソンの括弧式を求めよ．

解　公式（42.12）によって

$$\{M_x p_y\}=-\frac{\partial M_x}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}(yp_z-zp_y)=-p_z.$$

同様にして２つの公式

$$\{M_x p_x\}=0,\qquad \{M_x p_z\}=p_y$$

が得られる．残りはこれらの式において添字 x, y, z の循環置換によって得られる．

2. $\boldsymbol{M}$ の成分どうしから構成されるポアッソンの括弧式をきめよ.

解 公式 (42.5) によって，直接計算から

$$\{M_xM_y\} = -M_z, \qquad \{M_yM_z\} = -M_x, \qquad \{M_zM_x\} = -M_y.$$

ことなった粒子の運動量と座標は互いに独立な変数であるから，問題1および2で得られた公式は，粒子の任意の系の全運動量，全角運動量に対しても正しい.

3. つぎの式を証明せよ：

$$\{\varphi M_z\} = 0.$$

ここで φ は粒子の座標および運動量の任意のスカラー関数である.

解 スカラー関数がベクトル $\boldsymbol{r}$ および $\boldsymbol{p}$ に依存するのは，$\boldsymbol{r}^2, \boldsymbol{p}^2, \boldsymbol{rp}$ の形を通してだけである．したがって，

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{\partial \varphi}{\partial (\boldsymbol{r}^2)} 2\boldsymbol{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial (\boldsymbol{pr})} \boldsymbol{p}.$$

$\partial\varphi/\partial\boldsymbol{p}$ に対しても同様である．求める関係は，上に示した微分演算の規則を考慮して，公式 (42.5) にしたがって直接計算すればたしかめられる.

4. つぎのことを示せ.

$$\{\boldsymbol{f}M_z\} = [\boldsymbol{fn}].$$

ここで $\boldsymbol{f}$ は粒子の座標および運動量のベクトル関数，$\boldsymbol{n}$ は z 軸方向の単位ベクトルである.

解 任意のベクトル $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ は，$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ をスカラー関数として，$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{r}\varphi_1 + \boldsymbol{p}\varphi_2 + [\boldsymbol{rp}]\varphi_3$ の形に書くことができる．求める関係は，(42.9)，(42.11)，(42.12) および問題3で示された公式をもちいて，直接計算により検証される.

§ 43. 座標の関数としての作用

最小作用の原理を定式化する際に，われわれは，質点が時刻 t_1 と t_2 で占める，与えられた2点 $q^{(1)}$ と $q^{(2)}$ を結ぶ軌跡にそってとられた積分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt \tag{43.1}$$

を考えた．作用の変分の際には，共通の $q(t_1), q(t_2)$ をもつ，互いに接近した軌跡についての積分の値が比較された．これらの軌跡のうちで1つだけが実際におこる運動に対応する——それは積分 S が最小値をとるような軌跡である.

ここでは，作用の概念をべつの形で考えよう．すなわち，S は本当の軌跡にそった運動を特徴づける量であるとみなす．そして，同じ点 $q(t_1) = q^{(1)}$ から出発して，時刻 t_2 には，さまざまのことなる位置を通過する積分の値を比較しよう．いいかえると，作用積分を，積分の上限に相当する時刻における座標の値の関数

として考えるのである.

１つの軌跡からその近くのほかの軌跡へ移ると，それに対応する作用の変化は（自由度１の場合）表式（2.5）

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt$$

によって与えられる．実際におこる運動の軌跡はラグランジュ方程式をみたすから，ここにでてきた積分はゼロになる．第１項では，下限については $\delta q(t_1) = 0$ と仮定している；一方 $\delta q(t_2)$ の値を簡単のために δq と書くことにする．$\partial L/\partial \dot{q}$ を p におきかえ，結局，$\delta S = p\delta q$ を得る．一般に，任意の自由度の場合には

$$\delta S = \sum_i p_i \delta q_i \tag{43.2}$$

となる．この関係から，座標についての作用の偏導関数が，対応する運動量に等しいことが結論される：

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \tag{43.3}$$

同じようにして，作用を時間のあらわな関数とみなすこともできる．すなわち軌跡を，与えられた時刻 t_1 に与えられた位置 $q^{(1)}$ から出発して，与えられた位置 $q^{(2)}$ に，しかしさまざまなことなった時刻 $t_2 = t$ に到達するものとみなせばよい．この意味での偏導関数 $\partial S/\partial t$ は，積分に，対応した変分をおこなうことによって求められる．しかし，もっと簡単に，すでに得られた公式（43.3）をもちいてつぎのようにして求めることもできる．作用の定義そのものによって，軌跡にそった時間についての作用の完全導関数は

$$\frac{dS}{dt} = L \tag{43.4}$$

である．一方，S を上に述べた意味で座標と時刻の関数とみなし，公式（43.3）をつかえば

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i.$$

両方の表式をくらべれば

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i$$

となる．あるいは

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H. \tag{43.5}$$

公式 (43.3) および (43.5) をまとめて，つぎのように書くことができる．

$$dS = \sum_i p_i dq_i - H dt. \tag{43.6}$$

これは，作用を (43.1) の積分の上限における座標と時刻の関数とみなしたとき，その全微分を与える表式である．つぎに，運動の終わりの座標（と時刻）だけでなくはじめのそれも変化させるとしよう．これに対応する S の変化が，両端での，表式 (43.6) の差で与えられることは明らかである．すなわち

$$dS = \sum p_i^{(2)} dq_i^{(2)} - H^{(2)} dt^{(2)} - \sum p_i^{(1)} dq_i^{(1)} + H^{(1)} dt^{(1)}. \tag{43.7}$$

この関係は，適当な影響のもとに系の最終状態をはじめの状態の思いどおりの関数となるようにする，というわけにはいかないことを示している．つまり，(43.7) 式の右辺が完全微分であるような運動だけが可能である．このように，最小作用の原理の存在は，ラグランジアンの具体的な形には無関係に，可能な運動の全体に一定の制限を課する．とくに，空間の与えられた点から放射される粒子束に対して（外部の場の形によらない）一連の共通の規則を確立することができる．これらの合法則性の研究はいわゆる**幾何光学**[1] の対象をなしている．

ハミルトン方程式が作用の極小性の条件から形式的に導かれることに注意しよう．そのためには，作用を (43.6) によって積分

$$S = \int \left(\sum_i p_i dq_i - H dt\right) \tag{43.8}$$

の形に書き，さらに座標および運動量を独立な変分量とみなせばよい．ふたたび簡単のために，座標が１つ（および運動量が１つ）の場合とし，作用の変分をとる：

$$\delta S = \int \left\{ \delta p dq + p d\delta q - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q \, dt - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \, dt \right\}.$$

第２項を（部分積分により）変形すれば，

$$\delta S = \int \delta p \left(dq - \frac{\partial H}{\partial p} dt \right) + p \delta q \Big| - \int \delta q \left(dp + \frac{\partial H}{\partial q} dt \right)$$

となる．積分の限界では $\delta q = 0$ とおかなければならないから第２項はおちる．残った表式が，任意な独立の δp と δq に対してゼロになるためには，その被積分関数の両方がゼロにならなければならない：

$$dq = \frac{\partial H}{\partial p} dt, \qquad dp = -\frac{\partial H}{\partial q} dt.$$

---

1) 第２巻《場の古典論》，第７章を見よ．

すなわち dt で割ればハミルトン方程式が得られる．

§ 44. モーペルテュイの原理

最小作用の原理によって力学系は完全に決定される．すなわちこの原理から導かれる運動方程式を解くことによって，軌跡の形も，またその軌跡上の位置の時間に対する依存関係も求めることができる．

もし問題を軌跡だけを求める（問題の時間に関する側面を残しておいて）ことに限るならば，最小作用の原理をまったく簡単な形に定式化することができる．

ラグランジアン，したがってまたハミルトニアンが時間を陽に含まない，したがって系のエネルギーが保存していると仮定する：

$$H(p, q) = E = \text{const.}$$

最小作用の原理にしたがえば，始点および終点の座標と時間(t_0 および t とする)が与えられているとき，作用の変分はゼロとならなければならない．いま，前と同様に，始点と終点の座標は固定しておいて終点の時刻 t を変化させたと考えると（(43.7) 参照)，

$$\delta S = -H\delta t \tag{44.1}$$

がなりたつ．

系のすべての仮想的な運動を比較するのでなく，エネルギーの保存法則をみたす運動だけを比較することにしよう．このような軌跡に対しては，(44.1) の H を定数 E におきかえることができるから

$$\delta S + E\delta t = 0. \tag{44.2}$$

作用を (43.8) の形に書き，ここでも H の代わりに E とおくと

$$S = \int \sum_i p_i dq_i - E(t - t_0) \tag{44.3}$$

となる．この表式の第1項

$$S_0 = \int \sum_i p_i dq_i \tag{44.4}$$

は**簡約された作用**ともよばれる．(44.3) を (44.2) に代入して

$$\delta S_0 = 0. \tag{44.5}$$

このように，簡約された作用は，エネルギー保存法則をみたし，かつ，勝手な時刻に，終点を通りすぎるすべての軌跡に関して，極小値をとるのである．この

ような変分原理をもちいるためには，あらかじめ，運動量および（44.4）の被積分関数の全体を座標 q およびその微分 dq で表わしておかなければならない．このために運動量の定義そのものである等式

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L\left(q, \frac{dq}{dt}\right) \tag{44.6}$$

およびエネルギーの保存法則の方程式

$$E\left(q, \frac{dq}{dt}\right) = E \tag{44.7}$$

をもちいればよい．あとの方程式から微分 dt を座標 q およびその微分 dq で表わし，公式（44.6）へ代入することによって，運動量を q および dq で表わすことができる．この場合エネルギー E はパラメターの役をはたす．このようにして得られた変分原理は系の軌跡を決定する；この原理は普通**モーペルテュイの原理**とよばれている（その正確な定式化は，オイラーとラグランジュによって与えられたのであるが）．

ラグランジアンの普通の形（5.5）——運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの差としての

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q)$$

に対して，上に示した演算を具体的におこなおう．このとき運動量は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k a_{ik}(q) \dot{q}_k,$$

エネルギーは

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k + U(q).$$

あとの式から

$$dt = \sqrt{\frac{\sum a_{ik} dq_i dq_k}{2(E-U)}}. \tag{44.8}$$

この表式を

$$\sum_i p_i dq_i = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{dq_k}{dt} dq_i$$

へ代入して，簡約された作用が

$$S_0 = \int \sqrt{2(E-U) \sum_{i,k} a_{ik} dq_i dq_k} \tag{44.9}$$

という形に求められる．

とくに1個の質点に対しては運動エネルギーは

$$T=\frac{m}{2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2$$

であり（m は粒子の質量，dl は軌跡の線素），軌跡の形をきめる変分原理は

$$\delta\int\sqrt{2m(E-U)}\,dl=0 \tag{44.10}$$

である．ここで積分は空間内の与えられた2点のあいだでとられる．この形はヤコービによって与えられた．質点の自由運動 $U=0$ の場合には，（44.10）はあたりまえの結果

$$\delta\int dl=0$$

を与える．すなわち粒子は最短距離の道筋——直線にそって運動する．

作用（44.3）にもどって，こんどはパラメターEに関する変分をおこなおう：

$$\delta S=\frac{\partial S_0}{\partial E}\delta E-(t-t_0)\delta E-E\delta t.$$

これを（44.2）に代入すれば

$$\frac{\partial S_0}{\partial E}=t-t_0 \tag{44.11}$$

を得る．公式（44.9）の形の簡約された作用については，この等式は

$$\int\sqrt{\frac{\sum a_{ik}dq_idq_k}{2\,(E-U)}}=t-t_0 \tag{44.12}$$

という関係になる．これは方程式（44.8）の積分にほかならない．軌跡の方程式と組み合わせると，これは運動を完全に決定する．

問　　題

変分原理（44.10）より軌跡の微分方程式を求めよ．

解　変分を実行すると

$$\delta\int\sqrt{E-U}\,dl=-\int\left\{\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}\frac{\delta \boldsymbol{r}}{2\sqrt{E-U}}dl-\sqrt{E-U}\,\frac{d\boldsymbol{r}}{dl}d\delta\boldsymbol{r}\right\}$$

となる．第2項で，$dl^2=d\boldsymbol{r}^2$，したがって $dld\delta l=d\boldsymbol{r}d\delta\boldsymbol{r}$ であることを考慮してある．この項を部分積分し，被積分関数のなかの $\delta\boldsymbol{r}$ の係数をゼロとおくと，軌跡の方程式

$$2\sqrt{E-U}\,\frac{d}{dl}\left(\sqrt{E-U}\,\frac{d\boldsymbol{r}}{dl}\right)=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}$$

を得る．

左辺の微分をおこない，力 $\boldsymbol{F}=-\partial U/\partial \boldsymbol{r}$ を導入すれば，この方程式をつぎの形におくことができる：

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dl^2}=\frac{\boldsymbol{F}-(\boldsymbol{F}\boldsymbol{t})\boldsymbol{t}}{2(E-U)}.$$

ここで $\boldsymbol{t}=d\boldsymbol{r}/dl$ は軌跡の接線方向の単位ベクトルである．差 $\boldsymbol{F}-(\boldsymbol{F}\boldsymbol{t})\boldsymbol{t}$ は軌跡に垂直な方向への力の成分 $\boldsymbol{F}_n$ である．導関数 $d^2\boldsymbol{r}/dl^2=d\boldsymbol{t}/dl$ は，微分幾何学で知られているように $\boldsymbol{n}/R$ に等しい．ここで R は軌跡の曲率半径，$\boldsymbol{n}$ はそれへの主法線方向の単位ベクトルである．$E-U$ に $mv^2/2$ を代入して

$$\boldsymbol{n}\frac{mv^2}{R}=\boldsymbol{F}_n$$

を得る．これは，曲線軌跡にそって運動する場合の，法線加速度に対する良く知られた表現に対応する．

§45. 正 準 変 換

一般座標 q のえらび方は，どのような条件によっても制限されていない．それらは空間における系の位置を一意的にきめる s 個の任意の量であればよい．ラグランジュ方程式 (2.6) の形はこのえらび方にはよらない．この意味で，ラグランジュ方程式は座標 $q_1, q_2, \cdots$ から他の任意の独立な量 $Q_1, Q_2, \cdots$，への変換に対して不変であるといってよい．新しい座標 Q は古い座標 q の関数であるが，このときこの関係が時間を陽に含んでいるようなえらび方もまた許される．つまり変換は

$$Q_i=Q_i(q,t) \tag{45.1}$$

といった形をとる（これはしばしば**点変換**とよばれる）．

ラグランジュ方程式だけでなく，ハミルトン方程式も変換 (45.1) に際して (40.4) の形を不変にたもつ．ところが，ハミルトンの方程式はじつはもっと広い範囲の変換に際して不変なのである．この事情は，ハミルトンの方式では座標 q とともに運動量 p が同等の独立変数としての役をはたしているということに本質的につながっている．したがって変換の概念は，$2s$ 個の独立変数 p, q から新変数 P, Q への変換

$$Q_i=Q_i(p,q,t), \qquad P_i=P_i(p,q,t) \tag{45.2}$$

を含むように拡張される．変換をこのように拡張できるということは，ハミルト

ンの方式の重要な長所の1つである.

しかし,(45.2) の形の任意の変換に際しては, 運動方程式は正準型にはならない. まず, 新しい変数 P, Q で書いた運動方程式が, 何か新しいハミルトニアン $H'(P, Q)$ をつかって

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} \tag{45.3}$$

と書けるために, 変換がみたさねばならない条件を導こう. このような変換を**正準変換**という.

正準変換の公式は, つぎのようにして得られる. §43 の終わりに示したように, ハミルトン方程式は

$$\delta\int(\sum_i p_i dq_i - H dt) = 0 \tag{45.4}$$

という形の最小作用の原理から得られる (ここですべての座標, 運動量は独立に変分される). 新変数 P, Q もまたハミルトン方程式をみたすためには, 新変数に対しても同様に最小作用の原理

$$\delta\int(\sum P_i dQ_i - H' dt) = 0 \tag{45.5}$$

がなりたたなければならない. 2つの原理 (45.4) と (45.5) とは, 両方の被積分関数が座標, 運動量および時間の任意関数 F の完全微分だけしかちがっていないというときにだけ, 等価な条件でありうる;そうであれば2つの積分の差は変分に際しては結果に影響しない定数 (積分区間の両端における F の値の差) になってしまうからである. このようにして

$$\sum p_i dq_i - H dt = \sum P_i dQ_i - H' dt + dF$$

でなければならない. すべての正準変換はこの関数 F によって特徴づけられる. この関数は変換の**母関数**とよばれる.

得られた関係を

$$dF = \sum p_i dq_i - \sum P_i dQ_i + (H' - H) dt \tag{45.6}$$

と書きなおすと, つぎのことがわかる.

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \qquad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{45.7}$$

ここでは母関数が新旧の座標 (と時間) の関数として与えられていると仮定している:$F = F(q, Q, t)$. 関数 F を与えると, 公式 (45.7) が古い変数 (p, q) と

新しい変数（P, Q）とのあいだの関係を与え，さらに新しいハミルトニアンの形を与える．

母関数を変数 q と Q とで表わさずに，古い座標 q と新しい運動量 P とで表わすと便利なこともある．この場合正準変換の公式を導くには，（45.6）式に適当なルジャンドル変換をほどこさなければならない．すなわち，つぎのようにする．

$$d(F+\sum P_iQ_i)=\sum p_idq_i+\sum Q_idP_i+(H'-H)dt.$$

左辺の微分記号の下にある表式は変数 q, P で表わされており，新しい母関数となっている．これを $\Phi(q, P, t)$ で表わせばつぎのようになる[1]．

$$p_i=\frac{\partial\Phi}{\partial q_i},\qquad Q_i=\frac{\partial\Phi}{\partial P_i},\qquad H'=H+\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \tag{45.8}$$

同じようにして，変数 p と Q，あるいは変数 p と P の関数としての母関数をもちいて表わされる正準変換の公式も導かれる．

新旧のハルトニアンの関係が，いつも同一の仕方，すなわち差 $H'-H$ が母関数の時間についての偏導関数で与えられるようになっていることに注意しよう．とくに母関数が時間によらないときには $H'=H$ である．いいかえると，このときには新しいハルトニアンを得るためには，H のなかの p, q をただ新しい変数 P, Q でおきかえればよい．

正準変換の広さは，ハミルトン方式における一般座標および一般運動量の概念の最初の意味をいちじるしく変えてしまう．変換（45.2）は量 P, Q のそれぞれを座標q，運動量 p の両方に結びつけてしまうから，変数 Q はもはや純粋な空間座標ではない．変数の二つの組のあいだのちがいは，名前の上のことにすぎなくなる．この事情は，たとえば，$Q_i=p_i, P_i=-q_i$ という変換のときに[2]，きわめてはっきりと示される．この場合方程式の正準形はたしかに保存され，座標と運動量が交換されるだけである．

このような事情のために，ハミルトン方式における変数 p, q はしばしば単に**正準共役量**とよばれる．

正準共役の条件は，ポアッソンの括弧式によって表わせる．そのために，まずポアッソンの括弧式が正準変換によって不変であるという一般定理を証明する．

1）母関数を $\Phi=\sum f_i(q,t)P_i$（f_i は任意の関数）の形にとると，新しい変数が $Q_i=f_i(q,t)$，すなわち古い座標だけ（運動量はない）で表わされる変換を得る．これは点変換である．それが正準変換の一部分であることがこうして示された．

2）この変換には母関数 $F=\sum q_iQ_i$ が対応する．

$\{fg\}_{p,q}$ を微分演算が変数 p,q についておこなわれた，量 f,g のポアッソンの括弧式とし，$\{fg\}_{P,Q}$ を正準変数 P,Q について微分がおこなわれたポアッソンの括弧式であるとしよう．このとき，

$$\{fg\}_{p,q}=\{fg\}_{P,Q}. \tag{45.9}$$

この関係は，正準変換の公式をつかって直接計算をしてもたしかめられる．しかし，つぎのような考察によって計算せずにすますことができる．

まずはじめに，正準変換（45.7）あるいは（45.8）においては時間はパラメターにすぎない．したがって，いまわれわれが時間を陽に含んでいない量に対して定理（45.9）を証明したとすれば，それは一般の場合にも正しい．いま，ただ形式的に，量 g をある仮想的な系のハミルトニアンであるとみなそう．そうすれば（42.1）式にしたがって $\{fg\}_{p,q}=df/dt$．導関数 df/dt は（われわれの仮想的な系の）運動の性質だけに依存して，変数のえらび方には依存しない．したがってポアッソンの括弧式 $\{fg\}$ も正準変数のとりかえによって変わらない．

公式（42.13）と定理（45.9）とから

$$\{Q_iQ_k\}_{p,q}=0, \qquad \{P_iP_k\}_{p,q}=0, \qquad \{P_iQ_k\}_{p,q}=\delta_{ik} \tag{45.10}$$

が得られる．これが，変換 $p,q\to P,Q$ が正準変換であるために，新しい変数がみたしているべき条件を，ポアッソンの括弧式をつかって表わした式である．

運動にともなう量 p,q の変化を，一つの正準変換とみなすことができるということに注意しよう．この意味はつぎのことである．q_t,p_t を時刻 t における正準変数とし，$q_{t+\tau},p_{t+\tau}$ をもう一つの時刻 $t+\tau$ における正準変数とする．$q_{t+\tau}$, $p_{t+\tau}$ は q_t,p_t（およびパラメターとしての時間の間隔 τ）のある関数である：

$$q_{t+\tau}=q(q_t,p_t,\tau), \qquad p_{t+\tau}=p(q_t,p_t,\tau).$$

これらの式を変数 q_t,p_t から変数 $q_{t+\tau},p_{t+\tau}$ への変換を表わす式とみなすならば，これは正準変換である．このことは，ほんとうの軌跡にそって与えられた時刻 t および $t+\tau$ に経過する点 q_t および $q_{t+\tau}$ を変数とする作用 $S(q_{t+\tau},q_t)$ の微分が，$dS=\sum(p_{t+\tau}\,dq_{t+\tau}-p_tdq_t)$ で表わされる（（43.7）を見よ）ことから明らかである．この微分の表式と（45.6）とを比較すれば，S が変換の母関数になっていることがわかる．

§ 46. リウヴィルの定理

力学現象の幾何学的解釈のために，しばしば**位相空間**という概念がもちいられ

る．これは，与えられた力学系の s 個の一般座標と s 個の運動量の値を座標とする $2s$ 次元の空間である．この空間の各点は，系の一定の状態に対応する．系の運動につれて，系を表現する点は位相空間内に線をえがいてゆく．この線を位相軌跡とよぶ．

微分の積

$$d\Gamma = dq_1 \cdots dq_s \, dp_1 \cdots dp_s$$

は位相空間の《体積要素》とみなされる．位相空間のある領域にわたってとられその体積を表わす積分 $\int d\Gamma$ を考えよう．この量が正準変換に関して不変量であること，すなわち変数 p, q から変数 P, Q への正準変換がおこなわれるとき，空間 p, q および空間 P, Q 上のそれぞれ対応する領域の体積が等しい：

$$\int \cdots \int dq_1 \cdots dq_s dp_1 \cdots dp_s = \int \cdots \int dQ_1 \cdots dQ_s dP_1 \cdots dP_s \qquad (46.1)$$

ということを示そう．

よく知られているように，多重積分における変数変換はつぎの公式にしたがっておこなわれる：

$$\int \cdots \int dQ_1 \cdots dQ_s dP_1 \cdots dP_s = \int \cdots \int D dq_1 \cdots dq_s dp_1 \cdots dp_s.$$

ここで

$$D = \frac{\partial(Q_1, \cdots, Q_s, P_1, \cdots, P_s)}{\partial(q_1, \cdots, q_s, p_1, \cdots, p_s)} \qquad (46.2)$$

は変換のヤコビアンとよばれる．したがって定理（46.1）の証明は，すべての正準変換のヤコビアンが１に等しい：

$$D = 1 \qquad (46.3)$$

を証明することに帰する．

ヤコビアンを一定の意味で分数のように扱うことができるというよく知られた性質をつかおう．$\partial(q_1, \cdots, q_s, P_1, \cdots, P_s)$ で《分子，分母を割り》

$$D = \frac{\partial(Q_1, \cdots, Q_s, P_1, \cdots, P_s)}{\partial(q_1, \cdots, q_s, P_1, \cdots, P_s)} \Big/ \frac{\partial(q_1, \cdots, q_s, p_1, \cdots, p_s)}{\partial(q_1, \cdots, q_s, P_1, \cdots, P_s)}$$

を得る．ヤコビアンの《分子》，《分母》が同一の量を含んでいるときのよく知られた規則にしたがえば，ヤコビアンはもっと少ない変数に関するものになる．この場合におちる分母分子で共通の量は，すべての微分演算において定数とみなされねばならない．したがって

$$D = \left\{\frac{\partial(Q_1, \cdots, Q_s)}{\partial(q_1, \cdots, q_s)}\right\}_{P=\mathrm{const}} \bigg/ \left\{\frac{\partial(p_1, \cdots, p_s)}{\partial(P_1, \cdots, P_s)}\right\}_{q=\mathrm{const}} \tag{46.4}$$

となる.

この表式の分子をつくっているヤコビアンについて考えてみよう．その定義によって，これは $\partial Q_i/\partial q_k$ を要素とする階数 s の行列式である（$\partial Q_i/\partial q_k$ は i 行 k 列の要素をなす)．(45.8）の母関数 $\Phi(q, P)$ をつかって正準変換を表わせば，

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_k \partial P_i}$$

となる．同様にして表式（46.4）の分母の行列式の i-k 要素は $\partial^2\Phi/\partial q_i\partial P_k$ に等しい．これは2つの行列式がただその行と列をとりかえただけであることを意味している．したがってそれらは互いに等しく，(46.4）は1に等しい．こうして定理は証明された.

さて，位相空間の与えられた領域内の各点が，考えている力学系の運動方程式にしたがって時間につれてその位置を変えているとしよう．領域全体も同じく移動している．このときその体積は変わらない：

$$\int d\Gamma = \mathrm{const}. \tag{46.5}$$

このこと（**リウヴィルの定理**とよばれる）は，位相空間の体積が正準変換の不変量であり，一方，運動につれての p, q の時間変化は（前節の終わりに示したように）正準変換とみなすことができる，ということからただちに証明される.

まったく同じようにして積分

$$\iint \sum_i dq_i dp_i,$$

$$\iiiint \sum_{i \neq k} dq_i dp_i dq_k dp_k,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

の不変性が示される．これらの積分は，位相空間内の与えられた2次元，3次元等々の多様体にわたって実行される.

§ 47. ハミルトン＝ヤコービの方程式

§43で座標と時間の関数としての作用という概念が導かれた．また，この関数 $S(q, t)$ の時間についての偏導関数がハミルトニアンと

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H(q,p,t)=0$$

という関係をもっていること，その座標についての偏導関数が運動量に等しいことが示された．これに対応して，ハミルトニアンのなかの運動量pを導関数$\partial S/\partial q$でおきかえ，関数$S(q,t)$がみたすべき方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_1,\cdots,q_s\,;\,\frac{\partial S}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_s}\,;\,t\right)=0 \tag{47.1}$$

が得られる．この1階偏微分方程式は**ハミルトン＝ヤコービの方程式**とよばれる．

ラグランジュの方程式およびハミルトンの正準方程式とならんで，ハミルトン＝ヤコービの方程式もまた，運動方程式を積分するための一般的方法の基礎である．

この方法の説明に入る前につぎのことを注意しておこう．すべての1階偏微分方程式は任意関数を含む解をもっており，このような解は方程式の一般解とよばれる．しかし力学の応用では，ハミルトン＝ヤコービの方程式の一般解は重要な役わりをせず，いわゆる**完全解**が重要である．これは独立変数と同じ数だけ独立な任意定数を含む，偏微分方程式の解である．

ハミルトン＝ヤコービの方程式の独立変数は時間と座標である．したがって，自由度sの系に対して，この方程式の完全解は$s+1$個の任意定数を含まなければならない．ところで，この方程式には，関数Sはその導関数が含まれるだけであるから，任意定数のうちの1つはその完全解において加法的に含まれる．すなわちハミルトン＝ヤコービの方程式の完全解は

$$S=f(t,q_1,\cdots,q_s\,;\,\alpha_1,\cdots,\alpha_s)+A \tag{47.2}$$

の形をもっている．ここで$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$とAは任意定数である[1]．

1）ハミルトン＝ヤコービの方程式の一般解は必要ではないが，完全解がわかっている場合にはそれが求められることを示そう．そのために，Aを残りの定数の任意関数とみなす：

$$S=f(t,q_1,\cdots,q_s\,;\,\alpha_1,\cdots,\alpha_s)+A(\alpha_1,\cdots,\alpha_s).$$

ここでα_iをs個の条件

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}=0$$

から座標と時間との関数として求めた結果を代入し，任意関数$A(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$を含んだ一般解が得られる．実際，このようにして求めた関数Sに対して

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha+\sum_k\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_k}\right)_q\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i}=\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha$$

↗

さて，ハミルトン=ヤコービの方程式の完全解と，われわれに興味ある運動方程式の解との関係を明らかにしよう．このために，関数 $f(t,q,\alpha)$ を母関数とし，量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ を新しい運動量とするような，量 q,p から新しい変数への正準変換を導く．新しい座標を $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ と書く．母関数は古い座標と新しい運動量とに依存しているから，公式 (45.8) をもちいる：

$$p_i=\frac{\partial f}{\partial q_i},\qquad \beta_i=\frac{\partial f}{\partial \alpha_i},\qquad H'=H+\frac{\partial f}{\partial t}.$$

ところで，関数 f はハミルトン=ヤコービの方程式をみたしているから，新しいハミルトニアンは恒等的にゼロであることがわかる．すなわち

$$H'=H+\frac{\partial f}{\partial t}=H+\frac{\partial S}{\partial t}=0.$$

したがって，新しい変数に対する正準方程式は $\dot{\alpha}_i=0,\dot{\beta}_i=0$ の形をもっている．したがって

$$\alpha_i=\text{const},\qquad \beta_i=\text{const}. \tag{47.3}$$

他方，s 個の方程式

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}=\beta_i$$

は，s 個の座標 q を時間および $2s$ 個の定数 α,β とによって表わしうることを示している．

このようにして，ハミルトン=ヤコービの方法による力学系の運動の解き方はつぎのような操作に帰せられる．

ハミルトニアンにしたがって，ハミルトン=ヤコービの方程式がつくられ，その方程式の完全解 (47.2) が求められる．それを任意定数 α について微分したものを新しい定数 β に等しいとおき，s 個の代数方程式

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}=\beta_i \tag{47.4}$$

の組を得る．これを解いて，座標 q を時間および $2s$ 個の任意定数の関数として求める．運動量の時間に対する関係は $p_i=\partial S/\partial q_i$ によって求められる．

われわれが s 個より少ない任意定数を含んだ不完全解しかもたない場合には，

↘ がなりたつ．一方 $(\partial S/\partial q_i)_\alpha$ は，ハミルトン=ヤコービの方程式をみたしている；というのは関数 $S(t,q;\alpha)$ が仮定によってこの方程式の完全解であるからである．以上のことから，導関数 $\partial S/\partial q_i$ もまたハミルトン=ヤコービの方程式をみたす．

これによって運動方程式の一般解を求めることはできないが，問題をいくらか簡単にすることはできる．たとえば，1個の任意定数 α を含む関数 S がわかっていれば，

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \mathrm{const}$$

という関係は $q_1, \cdots, q_s$ と t を結ぶ1つの方程式を与える．

ハミルトン＝ヤコービの方程式は，H が時間に陽によらないとき，すなわち保存系の場合は，いくらか簡単化されうる．この場合，作用の時間に対する関係は積 Et になってしまう：

$$S = S_0(q) - Et \tag{47.5}$$

（§44参照）．これを（47.1）に代入して簡約された作用 $S_0(q)$ に対するハミルトン＝ヤコービの方程式

$$H\left(q_1, \cdots, q_s ; \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right) = E \tag{47.6}$$

を得る．

§48. 変 数 分 離

多くの重要な場合に，ハミルトン＝ヤコービの方程式の完全解はいわゆる**変数分離**によって求められる．その本質的な点はつぎのことにある．

ある座標（q_1 と書こう）とそれに対応する導関数 $\partial S/\partial q_1$ とが，他の座標（あるいは時間）や導関数を含まないそれらだけの組み合わせ $\varphi(q_1, \partial S/\partial q_1)$ の形でのみ，ハミルトン＝ヤコービの方程式のなかに入っているとしよう．すなわち，方程式が

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S}{\partial q_i}, \frac{\partial S}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right\} = 0 \tag{48.1}$$

の形をしているとしよう．ここで q_i は q_1 をのぞくすべての座標の全体を表わしている．

このような場合に，解を和の形

$$S = S'(q_i, t) + S_1(q_1) \tag{48.2}$$

で求めよう．この表式を方程式（48.1）に代入すると

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right)\right\} = 0 \tag{48.3}$$

となる．解 (48.2) が得られたとする．その解を方程式 (48.3) へ代入すれば (48.3) 式は恒等式になり，座標 q_1 の任意の値に対して成り立つはずである．ところが，q_1 の変化は関数 φ だけを変える；したがって，(48.3) が恒等式であるためには，関数 φ もまた定数でなければならない．このように，方程式 (48.3) はつぎの2つの方程式に分解される：

$$\varphi\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right) = \alpha_1, \tag{48.4}$$

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \alpha_1\right\} = 0. \tag{48.5}$$

ここに α_1 は任意定数である．第1の方程式は常微分方程式であり，これから関数 $S_1(q_1)$ は単純な積分によってきめられる．残された偏微分方程式 (48.5) の独立変数の数は少なくなっている．

もしこのような方法で，s 個のすべての座標と時間とをつぎつぎに分離することができるならば，ハミルトン=ヤコービの方程式の完全解を求めることは，すっかり積分を求めることに帰してしまう．保存場に対しては，方程式 (47.6) の s 個の変数を分離するだけでよい．そして，完全分離の場合，方程式の求める解はつぎの形をとる：

$$S = \sum_k S_k(q_k\,;\alpha_1, \cdots, \alpha_s) - E(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)t. \tag{48.6}$$

ここで，関数 S_k のおのおのは座標のうちの1つだけに依存し，任意定数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ の関数としてのエネルギー E は方程式 (47.6) に $S_0 = \sum S_k$ を代入して得られる．

循環変数の場合は変数分離の特別の場合である．循環座標 q_1 は，ハミルトニアン，したがってまたハミルトン=ヤコービの方程式のなかに陽な形ではまったく表われない．関数 $\varphi(q_1, \partial S/\partial q_1)$ はこのとき単に $\partial S/\partial q_1$ になり，方程式(48.4) から $S_1 = \alpha_1 q_1$，したがって

$$S = S'(q_i, t) + \alpha_1 q_1. \tag{48.7}$$

定数 α_1 は，循環座標に対応する運動量 $p_1 = \partial S/\partial q_1$ の一定値にほかならない．保存場に対して $-Et$ の形をとった時間変数の分離は，《循環座標》t に対する変数分離の方法に対応していることに注意する．

このように，すでに研究した循環変数を利用して運動方程式の積分を簡単化する方法のすべては，ハミルトン=ヤコービの方程式における変数分離の方法に含

まれている．それ以外に，座標は循環的でないが，変数分離の可能な多くの場合がある．このために，ハミルトン＝ヤコービの方法は運動方程式の一般積分を求めるもっとも威力ある方法なのである．

ハミルトン＝ヤコービの方程式における変数の分離にとっては，座標の適当な選択が本質的である．いろいろな座標における変数分離のいくつかの例を，いろいろな外場のなかでの質点の運動の問題のうち，物理的に興味のある場合について述べる．

1. 球座標 ハミルトニアンをこれらの座標 (r, θ, φ) で書くと

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + U(r, \theta, \varphi)$$

で，もし

$$U = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\varphi)}{r^2 \sin^2\theta}$$

であれば変数分離が可能である．ここで $a(r), b(\theta), c(\varphi)$ は任意関数である．この式の最後の項は物理的興味を与えないだろう．したがって，われわれは

$$U = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} \tag{48.8}$$

の形の場を考察する．

この場合，関数 S_0 に対するハミルトン＝ヤコービの方程式は

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial \theta}\right)^2 + 2mb(\theta)\right] + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)^2 = E.$$

φ が循環座標であることを考えに入れ，解を

$$S_0 = p_\varphi \varphi + S_1(r) + S_2(\theta)$$

の形に求めることにする．そして，$S_1(r), S_2(\theta)$ に対して方程式

$$\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + 2mb(\theta) + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \beta,$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + a(r) + \frac{\beta}{2mr^2} = E$$

を得る．それらを積分して，最後に

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int\sqrt{\beta - 2mb(\theta) - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta + \int\sqrt{2m[E - a(r)] - \frac{\beta}{r^2}}\,dr. \tag{48.9}$$

ここで任意定数は p_φ, β, E である；それらについて S を微分し，その結果を

新しい定数に等しいとおくことによって運動方程式の一般解が得られる．

2.　放物線座標　円柱座標（この節では ρ, φ, z と記す）から放物線座標 ξ, η, φ への変換は，公式

$$z=\frac{1}{2}(\xi-\eta), \qquad \rho=\sqrt{\xi\eta} \tag{48.10}$$

によっておこなわれる．座標 ξ と η は0から ∞ までの値をとり，$\xi=$ 一定 の面および $\eta=$ 一定 の面は，すぐに確かめられるように，2組の回転放物面（z 軸を対称軸とする）を表わしている．(48.10) の関係は半径

$$r=\sqrt{z^2+\rho^2}=\frac{1}{2}(\xi+\eta) \tag{48.11}$$

を導入してほかの形に書くことができる．すなわち

$$\xi=r+z, \qquad \eta=r-z. \tag{48.12}$$

質点のラグランジアンを座標 ξ, η, φ で書き表わそう．表式 (48.10) を時間について微分し，円柱座標で書いたラグランジアン

$$L=\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-U(\rho, \varphi, z)$$

に代入することによって，

$$L=\frac{m}{8}(\xi+\eta)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi}+\frac{\dot{\eta}^2}{\eta}\right)+\frac{m}{2}\xi\eta\dot{\varphi}^2-U(\xi, \eta, \varphi). \tag{48.13}$$

運動量は

$$p_\xi=\frac{m}{4\xi}(\xi+\eta)\dot{\xi}, \qquad p_\eta=\frac{m}{4\eta}(\xi+\eta)\dot{\eta}, \qquad p_\varphi=m\xi\eta\dot{\varphi}$$

に等しく，ハミルトニアンは

$$H=\frac{2}{m}\,\frac{\xi p_\xi^2+\eta p_\eta^2}{\xi+\eta}+\frac{p_\varphi^2}{2m\xi\eta}+U(\xi, \eta, \varphi) \tag{48.14}$$

である．この座標系で，変数が分離でき，かつ物理的に興味のあるのは，ポテンシャル・エネルギーが

$$U=\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi+\eta}=\frac{a(r+z)+b(r-z)}{2r} \tag{48.15}$$

の形をしている場合である．

方程式は

$$\frac{2}{m(\xi+\eta)}\left[\xi\left(\frac{\partial S_0}{\partial\xi}\right)^2+\eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial\eta}\right)^2\right]+\frac{1}{2m\xi\eta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi+\eta}=E$$

となる．循環座標 φ は $p_\varphi\varphi$ の形に分離される．さらに $m(\xi+\eta)$ を乗じて，項

を組みなおせば

$$2\xi\left(\frac{\partial S_0}{\partial \xi}\right)^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{p_\varphi^2}{2\xi} + 2\eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial \eta}\right)^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_\varphi^2}{2\eta} = 0$$

となる.

$$S_0 = p_\varphi \varphi + S_1(\xi) + S_2(\eta)$$

とおいて，2つの方程式

$$2\xi\left(\frac{dS_1}{d\xi}\right)^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{p_\varphi^2}{2\xi} = \beta,$$

$$2\eta\left(\frac{dS_2}{d\eta}\right)^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_\varphi^2}{2\eta} = -\beta$$

を得る．これらを積分して，結局

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int\sqrt{\frac{mE}{2} + \frac{\beta}{2\xi} - \frac{ma(\xi)}{2\xi} - \frac{p_\varphi^2}{4\xi^2}}d\xi + \int\sqrt{\frac{mE}{2} - \frac{\beta}{2\eta} - \frac{mb(\eta)}{2\eta} - \frac{p_\varphi^2}{4\eta^2}}d\eta \quad (48.16)$$

となる．ここで p_φ, β, E は任意常数である.

3. 楕円座標 この座標 ξ, η, φ はつぎの公式によって導入される：

$$\rho = \sigma\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}, \qquad z = \sigma\xi\eta. \quad (48.17)$$

定数 σ は変換のパラメターである．座標 ξ は1から∞までの値をとり，座標 η は -1 から $+1$ までの値をとる．座標の値 $z=\sigma$, $z=-\sigma$ の z 軸上の2点 A_1, A_2 までの距離 $r_1 = \sqrt{(z-\sigma)^2+\rho^2}$, $r_2 = \sqrt{(z+\sigma)^2+\rho^2}$ を導入すると，幾何学的にずっと見やすい関係が得られる[1].

表式 (48.17) をこれらに代入して

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \sigma(\xi-\eta), & r_2 &= \sigma(\xi+\eta), \\ \xi &= \frac{r_2+r_1}{2\sigma}, & \eta &= \frac{r_2-r_1}{2\sigma}. \end{aligned}\right\} \quad (48.18)$$

ラグランジアンを円柱座標から楕円座標へ変換して

---

1) $\xi=$ 一定 の曲線は点 A_1 と A_2 とを焦点とする楕円

$$\frac{z^2}{\sigma^2\xi^2} + \frac{\rho^2}{\sigma^2(\xi^2-1)} = 1$$

を表わし，$\eta=$ 一定 の曲線は同じ焦点をもつ双曲線

$$\frac{z^2}{\sigma^2\eta^2} - \frac{\rho^2}{\sigma^2(1-\eta^2)} = 1$$

を表わす.

$$L=\frac{m\sigma^2}{2}(\xi^2-\eta^2)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2-1}+\frac{\dot{\eta}^2}{1-\eta^2}\right)+\frac{m\sigma^2}{2}(\xi^2-1)(1-\eta^2)\dot{\varphi}^2-U(\xi,\eta,\varphi). \tag{48.19}$$

したがってハミルトニアンに対しては,

$$H=\frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2-\eta^2)}\left[(\xi^2-1)p_\xi^2+(1-\eta^2)p_\eta^2+\left(\frac{1}{\xi^2-1}+\frac{1}{1-\eta^2}\right)p_\varphi^2\right]+U(\xi,\eta,\varphi). \tag{48.20}$$

変数が分離できる場合で物理的に興味のあるのは, ポテンシャル・エネルギーがつぎの形をしているときである：

$$U=\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi^2-\eta^2}=\frac{\sigma^2}{r_1r_2}\left\{a\left(\frac{r_2+r_1}{2\sigma}\right)+b\left(\frac{r_2-r_1}{2\sigma}\right)\right\}. \tag{48.21}$$

ここで $a(\xi)$, $b(\eta)$ は任意関数である. ハミルトン＝ヤコービの方程式で変数分離をした結果はつぎのようになる.

$$S=-Et+p_\varphi\varphi+\int\sqrt{2m\sigma^2E+\frac{\beta-2m\sigma^2a(\xi)}{\xi^2-1}-\frac{p_\varphi^2}{(\xi^2-1)^2}}d\xi+\int\sqrt{2m\sigma^2E-\frac{\beta+2m\sigma^2b(\eta)}{1-\eta^2}-\frac{p_\varphi^2}{(1-\eta^2)^2}}d\eta. \tag{48.22}$$

問　　題

1. つぎの場のなかでの運動方程式に対するハミルトン＝ヤコービの方程式の完全解を求めよ：

$$U=\frac{\alpha}{r}-Fz$$

(クーロン場と一様な場との重ね合わせ).

解　この場は (48.15) の型に属する. そこで

$$a(\xi)=\alpha-\frac{F}{2}\xi^2,\qquad b(\eta)=\alpha+\frac{F}{2}\eta^2.$$

ハミルトン＝ヤコービの完全解は, この $a(\xi), b(\eta)$ と公式 (48.16) で与えられる. 定数 β の意味をはっきりさせるために, 二つの式；

$$2\xi p_\xi^2+ma(\xi)-mE\xi+\frac{p_\varphi^2}{2\xi}=\beta,$$

$$2\eta p_\eta^2+mb(\eta)-mE\eta+\frac{p_\varphi^2}{2\eta}=-\beta$$

を差引き, 運動量 $p_\xi=\partial S/\partial\xi$ と $p_\eta=\partial S/\partial\eta$ とを, 円柱座標での運動量 $p_\rho=\partial S/\partial\rho$ と $p_z=\partial S/\partial z$ で表わすと, 簡単な変形ののち,

$$\beta = -m\left[\frac{\alpha z}{r} + \frac{p_\rho}{m}(zp_\rho - \rho p_z) + \frac{p_\varphi^2}{m\rho^2}z\right] - \frac{m}{2}F\rho^2$$

を得る．角括弧内の表式は，純粋なクーロン場に対して特有な運動の積分を表わしている（ベクトル（15.17)の z 成分)．

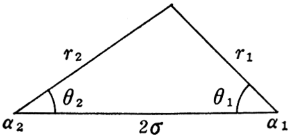


図　55

2.　つぎの場について同じことをおこなえ．

$$U = \frac{\alpha_1}{r_1} + \frac{\alpha_2}{r_2}$$

(2σ だけへだたった２つの静止した点によるクーロン場)．

解　この場は（48.21）の型に属する．そこで

$$a(\xi) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sigma}\xi, \qquad b(\eta) = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sigma}\eta.$$

作用 $S(\xi, \eta, \varphi, t)$ は，これらを（48.22）式に代入して求められる．定数 β の意味は，問題１のときと同じようにして解明される，この場合，つぎの量が保存することを表わしている：

$$\beta = \sigma^2\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2}\right) - M^2 + 2m\sigma(\alpha_1\cos\theta_1 + \alpha_2\cos\theta_2).$$

ここで，

$$M^2 = [\boldsymbol{rp}]^2 = p_\rho^2 z^2 + p_z\rho^2 + \frac{r^2 p_\varphi^2}{\rho^2} - 2z\rho p_z p_\rho,$$

また θ_1 と θ_2 とは図55に示した角度である．

§ 49.　断熱不変量

パラメーター λ によって特徴づけられる１次元の有界な運動をおこなっている力学系を考えよう．λ は，系自身の性質，あるいは，そのなかに系が存在する外場の性質をきめる[1]．

パラメーター λ はなんらかの外部的原因によってゆっくり（いわゆる**断熱的に**）時間とともに変化するものとしよう．《ゆっくりと》な変化とは，系の運動の周期 T のあいだの λ の変化が小さい変化のことである．すなわち

$$T\frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda. \tag{49.1}$$

λ が一定のときには，系は閉じており，一定のエネルギー E および一定の周期 $T(E)$ をもつ，厳密な周期運動をおこなっていた．λ が変化するときには，系は

1)　簡単のため，このようなパラメーターの数は１つであるとして話をすすめるが，その数は任意であっても，すべての結果は，そのままなりたつ．

閉じておらず，エネルギーEは，もはや，保存していない．しかし，λの変化がおそいという仮定によって，エネルギーEの変化の速さ$\dot{E}$も，また，小さいであろう．その変化の速さを，周期Tのあいだで平均し，そのあいだでの《速い》刻みの凸凹をならすならば，得られた$\overline{\dot{E}}$は，系のエネルギーの系統的なゆっくりした変化の速さを定義するものになる；この速さに関しては，それが，パラメーターλの変化の速さ$\dot{\lambda}$に比例するということができる．これは，上に述べた意味でゆっくりと変化する量Eが，λについての何らかの関数となっていることを意味する．この関係は，Eとλとの適当な組み合わせが一定である，という形に表わすことができよう．このような量――パラメーターがゆっくりと変化する系において一定にとどまる量は，**断熱不変量**とよばれる．

パラメーターλに依存する系のハミルトニアンを$H(p, q, \lambda)$とする．(40.5)により，系のエネルギーの変化の速さは，

$$\frac{dE}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt}. \tag{49.2}$$

この等式の右辺は，ゆっくりと変化する変数λによるだけでなく，速く変化する変数qとpに依存している．われわれが関心をもっている，エネルギーの変化の度合を知るためには，したがって式(49.2)を運動の周期にわたって平均しなければならない．λ（および$\dot{\lambda}$）の変化がおそいことを考えて，$\dot{\lambda}$の平均値の記号をとりさる：

$$\overline{\frac{dE}{dt}}=\frac{d\lambda}{dt}\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}. \tag{49.3}$$

また，$\partial H/\partial \lambda$の平均をとる際に，$q$と$p$だけを変化量とみなし，$\lambda$は変化量とみなさない．いいかえると，平均は，$\lambda$が与えられた一定の値をもつとしたらおこるような系の仮想的運動について，とるのである．

平均操作をあらわに書くと，

$$\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\partial H}{\partial \lambda}dt.$$

ハミルトン方程式$\dot{q}=\partial H/\partial p$によって，

$$dt=\frac{dq}{\dfrac{\partial H}{\partial p}}$$

となる．この等式をつかって，時間についての積分を，座標についての積分に変

換する．このときTもまたつぎの形に書きなおす．

$$T=\int_0^T dt=\oint\frac{dq}{\dfrac{\partial H}{\partial p}}\ ; \tag{49.4}$$

ここで$\oint$は周期のあいだの座標の全変化（《前向き》と《後向き》の両方）についての積分を表わす[1]．このようにして式（49.3）は，

$$\overline{\frac{dE}{dt}}=\frac{d\lambda}{dt}\frac{\displaystyle\oint\frac{\partial H/\partial\lambda}{\partial H/\partial p}dq}{\displaystyle\oint\frac{dq}{\partial H/\partial p}}. \tag{49.5}$$

すでに示したように，この式のなかの積分は与えられた一定のλに対する運動の軌跡にそっておこなわれる．このような軌跡にそってはハミルトニアンは一定の値Eを保ち，一方運動量は，変化する座標qおよび2つの独立な定数パラメーターE, λのきまった関数である．運動量がそのような関数$p(q\,;E,\lambda)$として理解しつつ，等式$H(p, q\,;\lambda)=E$をパラメーターλについて微分すると

$$\frac{\partial H}{\partial\lambda}+\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\lambda}=0,$$

あるいは

$$\frac{\partial H/\partial\lambda}{\partial H/\partial p}=-\frac{\partial p}{\partial\lambda}$$

を得る．これを（49.5）の分子の積分に代入し，また分母の被積分関数を$\partial p/\partial E$の形に書きなおすと

$$\overline{\frac{dE}{dt}}=-\frac{d\lambda}{dt}\frac{\displaystyle\oint\frac{\partial p}{\partial\lambda}dq}{\displaystyle\oint\frac{\partial p}{\partial E}dq},$$

あるいは

$$\oint\left(\frac{\partial p}{\partial E}\overline{\frac{dE}{dt}}+\frac{\partial p}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{dt}\right)dq=0.$$

結局，この等式はつぎの形に書きなおされる：

$$\overline{\frac{dI}{dt}}=0. \tag{49.6}$$

1）系の運動が回転であり，その座標qがある回転角φであるときには，$d\varphi$についての積分は《完全なひとまわり》について，すなわち0から2πまでおこなわなければならない．

ここでIは積分

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint pdq \tag{49.7}$$

を表わす．積分は与えられたEとλに対する運動の軌跡にそってとられる．この結果は，量Iがパラメターλの変化に対して，考えられている近似において一定にとどまること，すなわち断熱不変量であることを示している．

量Iは，系のエネルギー（およびλ）の関数である．そのエネルギーについての偏導関数は，運動の周期を与える：(49.4) によって，

$$2\pi\frac{\partial I}{\partial E}=\oint\frac{\partial p}{\partial E}dq=T, \tag{49.8}$$

あるいは

$$\frac{\partial E}{\partial I}=\omega. \tag{49.9}$$

ここで $\omega=2\pi/T$ は系の角振動数である．

系の位相空間での軌跡をもちいることによって，積分 (49.7) に直観的な幾何学的意味を与えることができる．いまの場合（1次元），位相空間は2次元の座標系 p, q であり，周期運動がえがく位相軌跡はこの平面の上の閉じた曲線である．この曲線にそってとられた積分 (49.7) は，かこまれた内部の面積を表わしている．それは，面積についての2重積分

$$I=\frac{1}{2\pi}\int dpdq \tag{49.10}$$

の形に書きなおせる．

例として，1次元振動子に対して断熱不変量を定めよう．そのハミルトニアンは

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2q^2}{2}. \tag{49.11}$$

ここでωは，振動子の固有振動数である．位相軌跡の方程式は，エネルギーの保存法則 $H(p, q)=E$ で与えられる．これは半軸が $\sqrt{2mE}$ および $\sqrt{2E/m\omega^2}$ の楕円であり，その面積（を2πで割ったもの）は

$$I=\frac{E}{\omega} \tag{49.12}$$

である．この量が断熱不変量であるということは，振動子のパラメターがゆっくりと変化する場合には，そのエネルギーは振動数に比例することを意味する．

§ 50. 正準変数

しばらくパラメーターλを一定としよう．すなわち，孤立系として考えよう．

変数p, qの正準変換を，Iが新しい《運動量》となるように導入しよう．この場合，母関数の役割りは，qおよびIの関数として表わされた《簡約された作用》S_0がはたす．S_0は系のエネルギーE（およびパラメーターλ）を指定しておいてとった積分

$$S_0(q, E; \lambda) = \int p(q, E; \lambda)dq \tag{50.1}$$

で定義される．一方，孤立系については，Iはエネルギーだけの関数である．したがってS_0を関数 $S_0(q, I; \lambda)$ の形に表わすことができ，また偏導関数 $(\partial S_0/\partial q)_E = p$ は，$I =$ 一定 のときの偏導関数 $(\partial S_0/\partial q)_I$ に一致する．以上によって

$$p = \frac{\partial S_0(q, I; \lambda)}{\partial q}. \tag{50.2}$$

これは，正準変換の公式（45.8）の第1のものに相当する．第2の公式は新しい《座標》をきめる．これをwと書こう：

$$w = \frac{\partial S_0(q, I; \lambda)}{\partial I}. \tag{50.3}$$

変数Iとwは**正準変数**とよばれ，この関係では，Iは**作用変数**，wは**角変数**とよばれる．

母関数 $S_0(q, I; \lambda)$ は時間に陽によらないから，新しいハミルトニアンH'は，古いハミルトニアンHで古い変数を新しい変数におきかえたものに一致する．いいかえると，H'は作用変数の関数として表わされたエネルギー $E(I)$ である．正準変数に対するハミルトンの方程式はつぎの形になる：

$$\dot{I} = 0, \qquad \dot{w} = \frac{dE(I)}{dI}. \tag{50.4}$$

第1の式から，当然のこととして，$I = \text{const}$ となり，エネルギーとともに，Iも一定となる．第2式から，角変数が時間の1次関数であることがわかる：

$$w = \frac{dE}{dI}t + \text{const} = w(I)t + \text{const}; \tag{50.5}$$

これは，振動の位相に他ならない．

作用 $S_0(q, I)$ は座標の多価関数である．この関数は，1周期たつごとにはじめの値にもどらずに，

$$\Delta S_0 = 2\pi I \tag{50.6}$$

だけ増加する．これは式（50.1）と I の定義（49.7）から明らかである．同じ時間のあいだに，角変数も

$$\Delta w = \Delta\frac{\partial S_0}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I}\Delta S_0 = 2\pi \tag{50.7}$$

だけ増加する．

逆に，q と p（あるいはその任意の1価関数 $F(p,q)$）とを正準変数で表現すると，この関数は，w が 2π だけ変化する（I の値は一定）ときに，その値を変えない．いいかえれば，すべての1価関数 $F(p,q)$ は，それが正準変数で表わされるときには，周期 2π の w の周期関数となる．

時間に依存するパラメター λ をもつ非孤立系に対しても，正準変数をもちいた運動方程式の定式化をおこなうことができる．これらの変数への変換は，積分（50.1）で定義され，かつ積分（49.7）で定義されている変数 I で表現された S_0 を母関数として，前述の公式（50.2），（50.3）で実現される．不定積分（50.1）および定積分（49.7）は，あたかも $\lambda(t)$ が一定の値をもっているかのように計算される；いいかえれば，$S_0(q, I; \lambda(t))$ は，λ 一定のときに計算された前の関数で，λ の代わりに，与えられた関数 $\lambda(t)$ をおきかえたものである[1]．

こんどの場合には，母関数が，（λ とともに）時間の陽な関数であるから，新しいハミルトニアント H' は，古いもの，すなわちエネルギー $E(I)$ とは，もはや一致しない．正準変換の一般公式（45.8）にしたがえば，

$$H' = E(I;\lambda) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = E(I;\lambda) + \Lambda\dot{\lambda}. \tag{50.8}$$

ここで，記号

$$\Lambda = \left(\frac{\partial S_0}{\partial \lambda}\right)_{q,I} \tag{50.9}$$

を導入した．Λ は，λ についての微分のあと，（50.3）をもちいて，I および w によって表現されていなければならない．

ハミルトンの方程式は，ここでは，

$$\dot{I} = -\frac{\partial H'}{\partial w} = -\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial w}\right)_{I,\lambda}\dot{\lambda}, \tag{50.10}$$

1） このようにして定義された関数 S_0 は，ほんとうの簡約された作用——時間に陽に依存する系についての——とは一致しないことを注意しておこう．

$$\dot{w} = \frac{\partial H'}{\partial I} = \omega(I;\lambda) + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial I}\right)_{w,\lambda}\dot{\lambda} \tag{50.11}$$

の形となる．ここで $\omega = (\partial E/\partial I)_\lambda$ は角振動数（λ が一定であるかのように計算された）である．

問　題

時間に依存する周期をもった調和振動子（ハミルトニアン（49.11））について，正準変数をもちいて表現した運動方程式を書け．

解　(50.1)—(50.3) において，すべての操作は，λ（この場合周期 ω がその役割をはたしている）を一定として実行されるから，q および p の w との関係は，周期一定の場合とまったく同様である（周期一定のときは，$w = \omega t$ である）：

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin w = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}}\sin w, \qquad p = \sqrt{2I\omega m}\cos w.$$

したがって，

$$S_0 = \int p dq = \int p\left(\frac{\partial q}{\partial w}\right)_{I,\omega} dw = 2I\int \cos^2 w\ dw.$$

それゆえ，

$$\Lambda = \left(\frac{\partial S_0}{\partial \omega}\right)_{q,I} = \left(\frac{\partial S_0}{\partial w}\right)_I\left(\frac{\partial w}{\partial \omega}\right)_q = \frac{I}{2\omega}\sin 2w.$$

方程式 (50.10), (50.11) はつぎのようになる．

$$\dot{I} = -I\frac{\dot{\omega}}{\omega}\cos 2w, \qquad \dot{w} = \omega + \frac{\dot{\omega}}{2\omega}\sin 2w.$$

§51.　断熱不変量の一定さの精度

式 (50.10) の形の運動方程式から，作用変数の断熱不変性をふたたび確認することができる．

関数 $S_0(q, I;\lambda)$ は q について一意の関数でない，すなわち，座標が元の値にもどったとき，S_0 は $2\pi I$ の整数倍だけ増加する．ところが，導関数 (50.9) は一意関数である．というのは，この際の微分は，I 一定のもとでおこなわれるので，S_0 に加わった増加分についての微分はゼロになるからである．すべての一意関数と同じく，変数 w の関数としての Λ は，w の周期関数でなければならない．周期関数の導関数 $\partial\Lambda/\partial w$ の平均値（1周期あたりの）は，ゼロになる．したがって，等式 (50.10) の平均をとり，$\dot{\lambda}$ の平均値記号をとりされば（λ の

変化がおそいとき),

$$\overline{\dot{I}} = -\overline{\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial w}\right)}_I \dot{\lambda} = 0 \tag{51.1}$$

が要求されるのである.

運動方程式(50.10),(50.11)によって,断熱不変量がどのような精度で保存されるかを調べることができる.この問題をつぎのように設定しよう.パラメター $\lambda(t)$ が,$t \to -\infty$ および $t \to +\infty$ でそれぞれ極限値 λ_- および λ_+ に収束するものとする:はじめ($t = -\infty$)の断熱不変量 I の値 I_- を与え,$t = +\infty$ における,その増加量 $\Delta I = I_+ - I_-$ を求める.

(50.10)から,

$$\Delta I = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Lambda}{\partial w} \dot{\lambda} dt. \tag{51.2}$$

すでに示したように,量 Λ は,変数 w について周期 2π の周期関数である.これをフーリエ級数に展開しよう:

$$\Lambda = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{ilw} \Lambda_l \tag{51.3}$$

(Λ は実数であるから,展開係数のあいだには $\Lambda_{-l} = \Lambda_l^*$ の関係がある).したがって,導関数 $\partial \Lambda / \partial w$ については,

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial w} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} i l e^{ilw} \Lambda_l = 2\mathrm{Re} \sum_{l=1} i l e^{ilw} \Lambda_l \tag{51.4}$$

となる.$\dot{\lambda}$ が十分に小さいときには,導関数 $\dot{w}$ は正である(その符号は,ω の符号に一致する——(50.11)を見よ):すなわち,w は時間 t の単調関数である.したがって,(51.2)を,dt についての積分から,dw についての積分に変換するとき,その上下限は,前どおりである:

$$\Delta I = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Lambda}{\partial w} \frac{d\lambda}{dt} \frac{dt}{dw} dw. \tag{51.5}$$

ここへ(51.4)を代入し,形式的に w を複素変数とみなして,積分を変形しよう.被積分関数は,w の実軸上で特異点をもたないものと仮定して,積分路を実軸から w の上半面内に移すことにする.この際,積分路は被積分関数の特異点に《ひっかかり》,それらのまわりをまわることによって,図56に示したようなかたちをとる.w_0 を,実軸にもっとも近い特異点,すなわち,虚振動数の大きさの最小値(符号は正)に対応する点であるとする.積分(51.5)への

主要な寄与は，この点の近傍から生ずる．その際，級数 (51.4) の各項が因数 $\exp(-l\,\mathrm{Im}\,w_0)$ を含む寄与をあたえる．絶対値で最小の負の指数の項（つまり $l=1$ の項）だけをのこすならば，

$$\Delta I \backsim \exp(-\mathrm{Im} w_0) \qquad (51.6)$$

となる[1]．

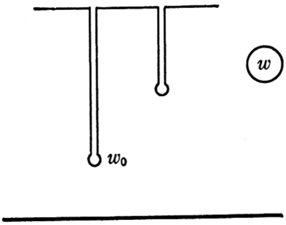


図 56

特異点 w_0 に対応する《時刻》（複素数である！）を t_0 とする：$w(t_0)=w_0$. 大まかにいって，値 $|t_0|$ は，一般には，系のパラメターが変化する時間間隔の特徴的な大きさと一致する．後者を τ で表わそう[2]．(51.6) の指数の大きさの程度についていえば，

$$\mathrm{Im} w_0 \sim \omega\tau \sim \frac{\tau}{T} \qquad (51.7)$$

となろう．仮定によって，$\tau \gg T$ であるから，この値は大きい．このように，差 $I_+ - I_-$ は，系のパラメターの変化の速さが小さいほど，その大きさの指数関数に比例して小さくなる[3]．

w_0 を T/τ の第１近似（すなわち，指数で $\sim(T/\tau)^{-1}$ の項だけとる近似）できめるためには，式 (50.11) の $\dot{\lambda}$ を含む小さな項をおとしてもよい，すなわち

$$\frac{dw}{dt} = \omega(I, \lambda(t)) \qquad (51.8)$$

と書ける．ここで，関数 $\omega(I,\lambda)$ の変数 I は，一定と考え，I_- に等しいと考える．そうすれば，

$$w_0 = \int^{t_0} \omega(I, \lambda(t))dt \qquad (51.9)$$

（下限としては，t の任意の実数値をとってよい；われわれに関心のある w_0 の虚数部分は，その値には関係しない）．

(51.8) で表わされている $\dot{w}$（および $\partial\Lambda/\partial w$ として級数 (51.4) のなかの第

1) 特殊な場合には，級数 (51.4) は $l=1$ の項をもたない（その例は，この節の問題を見よ）；この場合，級数中に存在する最低次の項数をとればよい．

2) パラメター λ がゆっくりと変化するということを，λ が $\xi = t/\tau$ の形でのみ t に依存する，と表現するならば，$t_0 = \tau\xi_0$ である．ここで，ξ_0 は関数 $\lambda(\xi)$ の特異点で，τ に依存しない．

3) もし，関数 $\lambda(t)$ の値のはじめと終わりが一致している ($\lambda_+ = \lambda_-$) とすれば，差 ΔI のみではなく，エネルギーのははじめと終わりの値の差 $\Delta E = E_+ - E_-$ もそれと同じく，指数関数的に小さくなる．というのは，(49.4) によれば，$\Delta E = \omega\Delta I$ であるから．

1項）を積分（51. 5）に代入すれば，

$$\Delta I \propto \mathrm{Re}\int ie^{iw}\frac{\dot{\lambda}dw}{\omega(I,\lambda)} \tag{51.10}$$

となる．これから，候補にのぼる（実軸にもっとも近い特異点の選択に際して）特異点としてあげられるのが，関数 $\dot{\lambda}(t)$ および $1/\omega(t)$ の特異点（極，分岐点）であることがわかる．ここで，ΔI が指数関数的に小さいという結論が，これらの関数が，実数の特異点をもたないという前提のもとで得られたことを思い出しておこう．

問　題

振動数が，つぎの法則によってゆっくりと変化している調和振動子について，ΔI を計算せよ．

$$\omega^2 = \omega_0^2\frac{1+ae^{\alpha t}}{1+e^{\alpha t}}.$$

ω は，$t=-\infty$ での $\omega_-=\omega_0$ から，$t=\infty$ での $\omega_+=\sqrt{a}\,\omega_0$ まで変化する．ただし，$a>0, \alpha\ll\omega_0$ としている[1]．

解　パラメーター λ として，振動数 ω 自体をとると，

$$\frac{\dot{\lambda}}{\omega}=\frac{\alpha}{2}\left(\frac{a}{e^{-\alpha t}+a}-\frac{1}{e^{-\alpha t}+1}\right).$$

この関数は，$e^{\alpha t}=-1$ および $e^{-\alpha t}=-a$ に極をもつ．積分 $\int\omega dt$ を計算すると，この極の1つ $\alpha t_0=-\ln(-a)$ で，$\mathrm{Im}\,\omega_0$ が最小値をとり，

$$\mathrm{Im}\,w_0=\begin{cases}\omega_0\pi/\alpha & a>1 \text{ のとき}\\ \omega_0\pi\sqrt{a}/\alpha & a<1 \text{ のとき}\end{cases}$$

となる．調和振動子に対しては，$\Lambda\propto\sin 2w$ である（§50の問題を見よ）から，級数(51. 3）は，その第2項（$l=\pm2$）だけになる．したがって，調和振動子については，

$$\Delta I\propto\exp(-2\,\mathrm{Im}w_0).$$

§ 52. 条件つき周期運動

多次元の自由度をもち，すべての座標について有界な運動をする孤立系を考察しよう．まず問題がハミルトン＝ヤコービの方法で完全な変数分離がおこなえるものであると仮定する．これは，適当な座標をえらぶと，簡約された作用が，おのおのは座標のうちの一つだけに依存する関数の和

1）調和振動子としての性格は，振動数がエネルギーに依存しないことによって現われている．

$$S_0 = \sum_i S_i(q_i) \tag{52.1}$$

で表わされるということである．

一般運動量は

$$p_i = \frac{\partial S_0}{\partial q_i} = \frac{dS_i}{dq_i}$$

であるから，関数 S_i のおのおのは，

$$S_i = \int p_i dq_i \tag{52.2}$$

の形をとる．

この関数は1価関数ではない．運動は有界であるから，座標のおのおのは一定の有限区間内の値をとる．この区間全体にわたる《前方》および《後方》への q_i の変化に応じて，作用は

$$\Delta S_0 = \Delta S_i = 2\pi I_i \tag{52.3}$$

だけ増加する．ここで I_i は

$$I_i = \frac{1}{2\pi}\oint p_i dq_i \tag{52.4}$$

であり，積分は上に述べた q_1 の変化についてとられる[1]．

さて，1次元運動に対して先の節でおこなったのと同じようにして，正準変換をつくろう．新変数を《作用変数》I_i および《角変数》

$$w_i = \frac{\partial S_0(q, I)}{\partial I_i} = \sum_k \frac{\partial S_k(q_k, I)}{\partial I_i} \tag{52.5}$$

にとる．ここでも母関数は，座標と量 I_i の関数として表わされた作用である．これらの変数で書いた方程式

$$\dot{I}_i = 0, \qquad \dot{w}_i = \frac{\partial E(I)}{\partial I_i}$$

により

$$I_i = \text{const}, \tag{52.6}$$

$$w_i = \frac{\partial E(I)}{\partial I_i} t + \text{const}. \tag{52.7}$$

---

1) つぎのことを強調しておく．ここでいっているのは，座標 q_1 の値がとりうる全区間にわたる形式的変化のことであって，実際の運動の周期のあいだの変化をいっているのではない（1次元運動のときには後者であった）．多次元自由度の系の実際の有界な運動は， 全体としても一般には周期的ではなく，また座標のおのおの時間的変化を個別的に見ても周期的ではない（以下の記述を参照）．

(50.7) と同じく，座標 q_i の全変化（《前方へ》のおよび《後方へ》の）に対して w_i の 2π だけの変化が対応する：

$$\Delta w_i = 2\pi. \tag{52.8}$$

いいかえると，量 $w_i(q, I)$ は座標の多価関数であり，座標がもとの値にもどったときに 2π の整数倍だけ変化している．この性質は，系の位相空間の上での関数 $w_i(p, q)$（座標と運動量とで表わされた）の性質としても，定式化することができる．量 I_i は，p, q で表わせば，これらの変数の1価関数であるから，$I_i(p, q)$ を $w_i(q, I)$ に代入することによって，位相空間の任意の閉じた曲線を1まわりするたびに 2π の整数倍だけ変化する関数 $w_i(p, q)$ を得る．

したがって，系の状態のすべての1価関数 $F(p, q)$[1] は，正準変数で表わせば，角変数のそれぞれについて周期 2π の周期関数である．したがってこれはつぎのような多重フーリエ級数に分解できる．

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \cdots l_s} e^{i(l_1 w_1 + \cdots + l_s w_s)}$$

($l_1, l_2, \cdots, l_s$ は整数)．ここで角変数を時間の関数として表わせば，F の時間変化はつぎのようになる．

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \cdots l_s} \exp\left\{it\left(l_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + \cdots + l_s \frac{\partial E}{\partial I_s}\right)\right\}. \tag{52.9}$$

この和の各項は，振動数

$$l_1\omega_1 + l_2\omega_2 + \cdots + l_s\omega_s \tag{52.10}$$

の時間についての周期関数である．これは基本振動数

$$\omega_i = \frac{\partial E}{\partial I_i} \tag{52.11}$$

の整数倍の和である．しかしすべての振動数 (52.10) は，一般には，それらのうちの1つの整数倍（または有理数倍）ではないから，和全体は厳密には周期関数ではない．これは，その特別な場合として，座標 q および運動量 p についてもいえる．

---

1) 《回転座標》——角度 φ（197 ページの脚注を見よ）——は系の状態に関して多価関数である．したがって 2π の整数倍だけことなる φ の値は系の同一の状態に対応する．したがって，座標 q のなかに角度があると，それは関数 $F(q, p)$ のなかに $\cos\varphi$ あるいは $\sin\varphi$ の形でのみ入りうる．これらは系の状態に関して1価である．

このように，系の運動は一般には全体としても厳密に周期関数ではなく，座標のおのおのについても周期関数でない．このことは，系がいまある状態を経過したとすると，有限時間ののちに，系がふたたびその状態にもどることはないことを意味している．しかし，十分に大きい時間ののちには，この状態にどれほど近い状態へももどりうることが証明できる．この性質のために，運動は**条件つきの周期運動**といわれる．

いろいろな特別な場合，基本振動数 $\omega_i=\partial E/\partial I_i$ のうちの2つ（あるいはそれ以上）が通約可能（任意の I_i の値に対し）であることがある．この場合，**縮重**があるという．もしすべての s 個の振動数が通約可能ならば，系の運動は**完全縮重**であるという．この場合，運動が厳密に周期的であり，すべての粒子の軌跡が閉じることは明らかである．

縮重が存在すると，第1に，系のエネルギーが依存している独立な量（I_i）の数が減少する．2つの振動数 ω_1 および ω_2 が

$$n_1\frac{\partial E}{\partial I_1}=n_2\frac{\partial E}{\partial I_2} \tag{52.12}$$

の関係で結ばれているとしよう．ここで n_1, n_2 は整数である．したがって量 I_1 と I_2 はエネルギーのなかに和 $n_2I_1+n_1I_2$ のかたちでのみ含まれる．

縮重している運動のきわめて重要な特質は，運動の1価の積分の数が，縮重していないとき（自由度の数だけある）にくらべてふえるという点にある．縮重のない場合，全部で $2s-1$ 個の運動の積分のうち，系の状態の1価関数であるのは s 個のみである．その完全な1組はたとえば s 個の量 I_i である．残った $s-1$ 個の積分は

$$w_i\frac{\partial E}{\partial I_k}-w_k\frac{\partial E}{\partial I_i} \tag{52.13}$$

のような差で表わされる．これらの値が一定であることは（52.7）から直接に導かれるが，角変数が多価関数であるために，それらは系の状態の1価関数でない．

縮重が存在すると，事情はちがってくる．なぜなら，（52.12）の関係にしたがう積分

$$w_1n_2-w_2n_1 \tag{52.14}$$

は，たしかに1価ではないけれども，その多価性は 2π の任意整数倍が加わって

いるということだけに絞られてしまっている．したがって，これらの量の3角関数をつくることによって，新しい1価の運動の積分が得られる．

場 $U=-\alpha/r$（この節の問題を見よ）のなかでの運動は，運動の縮重の1つの例である．この事情は，新しい，特殊な1価の運動の積分（15.17）が，任意の中心場の運動に表われる2つの（平面運動として見る）普通の1価の積分——角運動量 M とエネルギー E——のほかに存在するという結果に導く．

つぎのことに注意しよう．1価の積分が余分に現われるということが，更に縮重している運動に一つの性質を与える——すなわちその運動は一定の組の座標だけに対してでなく，いくつかの座標の組に対して[1]，完全に変数分離できる．実際，変数分離のできる座標系での量 I_i は1価の運動の積分である．一方，縮重があるとき，1価の積分の数は s 個をこえ，したがってわれわれがそれらのなかから量 I_i となるべきものをえらぶえらび方は一通りではない．

例として，ふたたびケプラー運動をとろう．これは球座標においても，放物線座標においても変数分離できる．

先の節で1次元の有界運動では作用変数が断熱不変量であることを示した．この定理は多次元自由度の系についてもなりたつ．これは，§51のはじめに述べた方法を拡張することにより，一般の場合に証明される．

変化するパラメター $\lambda(t)$ をもつ多次元の系の場合，正準変数で書いた運動方程式は，変化する作用 I_i のおのおのの変化の速さを（50.10）と同様に，

$$\dot{I}_i=-\frac{\partial\Lambda}{\partial w_i}\dot{\lambda} \tag{52.15}$$

と与える．ここで，前と同じく $\Lambda=(\partial S_0/\partial\lambda)_I$ である．これらの等式を系の基本的周期にくらべれば大きく，パラメター $\lambda(t)$ が変化する時間にくらべれば小さい時間について平均をとろう．この場合，$\dot{\lambda}$ からは平均の記号を取り除くことができ，また，導関数 $\partial\Lambda/\partial w_i$ の平均は，運動が λ の一定値に対して進行しており，したがって，条件つき周期運動とみなしておこなってよい．そうすれば，Λ は，角変数 w_i の一意周期関数ということになり，その導関数 $\partial\Lambda/\partial w_i$ の平均値はゼロとなる．

最後に，もっとも一般的な場合における，ハミルトン＝ヤコービの方程式の変数分離が仮定されていない，多く（s）の自由度をもつ孤立系の有界運動につい

1）$q_1'=q_1'(q_1),\ q_2'=q_2'(q_2)$ といった座標変更は別とする．

て，いくつかの注意を述べておこう．

変数分離のできる系の基本的な性質は，運動の積分 I_i が1価であること，その数が自由度に等しいことである．

変数分離できないもっと一般の場合には，1価の運動の積分は，その一定性が空間，時間の一様性と等方性を表わすもの（エネルギー，運動量，角運動量の保存法則）だけに制限される．

系の位相軌跡は，1価の運動の積分の与えられた一定値に対応する位相空間の領域を経過する．変数分離の系は s 個の1価の積分をもっているから，この条件によって位相空間における s 次元多様体（超平面）がきめられる．十分に長い時間ののち系の軌跡はこの超平面をいくらでも密に埋めつくす．

変数が分離されない系の場合には，1価の積分の数は（s よりも）へり，位相軌跡はもっと大きな次元の領域（多様体）を（全体あるいは部分的に）埋める．

終わりに，もし系のハミルトニアンが変数分離をゆるす関数とわずかだけことなっていると，運動の性質は条件つき周期運動の条件に近いものになり，その近さの度合いは，ハミルトニアンにおける付加項の小ささよりもはるかに程度が高いことを指摘しておく．

問　題

場 $U=-\alpha/r$ のなかでの楕円運動に対して作用変数を計算せよ．

解　運動の平面での極座標 r,φ において

$$I_\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p_\varphi d\varphi=M,$$

$$I_r=\frac{2}{2\pi}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{r^2}}\,dr=-M+\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}.$$

したがって，エネルギーを作用変数で表わすと

$$E=-\frac{m\alpha^2}{2(I_r+I_\varphi)^2}.$$

これは和 I_r+I_φ だけ依存している．これは運動の縮重を意味している．すなわち，φ と r に関する基本振動数が一致している．

軌道のパラメター p と e（(15.4) を見よ）は I_r, I_φ によって

$$p=\frac{I_\varphi^2}{m\alpha},\qquad e^2=1-\left(\frac{I_\varphi}{I_\varphi+Ir}\right)^2$$

と表わされる．量 I_r, I_φ が断熱不変量であることから，α あるいは m がゆっくりと変化するときに，軌道の離心率は不変であり，軌道の大きさは m および α に反比例する．

索　引

訳者あとがき

本書は Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц《Механика》, издание 3е, исправленное и дополненное, Издательство〈Наука〉, Москва, 1973 の全訳である.

本書の1958年にでた初版および1965年の第2版は，いずれも私たちの手で翻訳し，こんにちまでに何度も増刷を重ねてきた．こんどの第3版は，原著者の序文にあるように，最後の数節が全面的に書きなおされ，新しい内容が付け加えられたほかは，そう大きな改訂はない．しかし日本訳については，全文あらためて原書にあたって誤りや不適切な箇所を訂正し，いっそうの正確さと読みやすさとを期した.

力学といえば物理学のなかでは，もっとも早く定式化された部門であり，その教科書にはこれまでも事欠かなかった．しかし，これまでの多くの力学の教科書には，ほぼきまった型があった．本書は，そのような型をやぶり，理論物理学の他の分科との連繫が十分考慮されている点で，ユニークな特色をそなえていると思われる．この翻訳が，物理学を学ぶ人々にとってなんらかの役に立つことを希望している.

翻訳はこれまでと同様，第1，2，3，4章および第7章を水戸が第5，6章を広重が分担して訳し，それをもちよって，2人で全体にわたって検討を加えて最終稿をつくりあげた.

1974年3月

訳　　者

第3版の第6刷にあたり，玉木英彦先生の御教示を全面的にとり入れさせていただきました．心からの感謝を表明いたします.（1977年3月）

訳者紹介

広重　徹（ひろしげ てつ）
1952年　京都大学理学部物理学科卒業
1975年　没，日本大学理工学部教授
著　書　「物理学史Ⅰ，Ⅱ」培風館
訳　書　ランダウ＝リフシッツ《場の古典論》東京図書
ゼーリッヒ《アインシュタインの生涯》東京図書
ノイマン《量子力学の数学的基礎》みすず書房

水戸　巌（みと いわお）
1955年　東京大学理学部物理学科卒業
1986年　没
訳　書　シュポルスキー他《アインシュタインと現代物理学》東京図書
シュテインマン《空間と時間の物理学》東京図書

ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程
力学（りきがく）（増訂第3版）

1974年10月1日　第1刷発行　　Printed in Japan
2017年5月25日　第44刷発行

著　者　エリ・デ・ランダウ
　　　　イェ・エム・リフシッツ
訳　者　広　重　徹
　　　　水　戸　巌
発行所　東京図書株式会社
〒102-0072 東京都千代田区飯田橋3―11―19
振替00140-4-13803　電話03(3288)9461
http://www.tokyo-tosho.co.jp/

検印省略

ISBN978-4-489-01160-3